

Lösung zur Reihenkonvergenz:

Es handelt sich hier um eine Reihe, deren Summe phasenweise den Anschein vorgibt, dass sie bei einer bestimmten Stelle hinter dem Komma schnell gegen einen Wert konvergiert, dann jedoch sprunghaft wieder eine Änderung bei früheren Stellen erfährt. Um ein Beispiel zu nennen: Bei $n = 999$ verändert sich die Summe nur um den winzigen Betrag:

$$\frac{1}{81!} = 1.72499 \cdot 10^{-121}$$

Beim nächsten Glied $n+1 = 1000$ dann aber wieder beträchtlich um:

$$\frac{1}{4!} = 0.04166 \dots (!!!)$$

Insofern ist das schlichte numerische Aufsummieren aller Reihenglieder einerseits ziemlich tückisch, andererseits auch sehr aufwändig, da schnell die Grenze des Rechners erreicht wird, weil ja auch mit einer entsprechend großen Fließkommazahl gearbeitet werden muss!

Man muss daher die Summation auf diejenigen Reihenglieder beschränken, deren Beiträge am größten sind und (falls erforderlich) abschließend eine Abschätzung vornehmen, inwieweit sich die Restsumme aller nicht betrachteten Reihenglieder auf das Ergebnis auswirkt.

Vorgehensweise (1):

Es sei:

$$g = G1 + G2 + G3 + R1 + R2$$

Hierbei sind $G1$, $G2$, $G3$ verschiedene Summenformel-Anteile und $R1$ sowie $R2$ die Restglieder, die man am Ende vernachlässigen kann.

Mit $G1$ sollen alle Quersummen, die 1 ergeben, zusammengefasst werden. D.h., es betrifft die $n := \{1, 10, 100, 1000, \dots\}$.

Mit G2 sollen alle Quersummen von 2 bis 9 erfasst werden.

$$n:=\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

Mit G3 sollen die Quersummen von 10 bis 18 erfasst werden, die sich in 2-stelligen n befinden.

$$n:=\{19, 28, 29, 37, 38, 39, \dots, 96, 97, 98, 99\}$$

R1 ist der Rest bzgl. der Quersummen 10...18 bei Stellenanzahl >2.

R2 ist der Rest bzgl. der Quersummen >18 bei Stellenanzahl >2.

$$G1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} = e - 1$$

$$G2 = \sum_{m=2}^9 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+m-2)!}{(m-1)!(k-1)!(m \cdot k)!}$$

Für den Fall $m=2$ und $k=12$ liegt die Größenordnung des Summanden bei $1.934 \dots \cdot 10^{-23}$. Es muss daher bei k nicht gegen unendlich aufsummiert werden.

$$G3 = \sum_{m=10}^{18} \frac{19-m}{(2 \cdot m)!}$$

Schon die Summe von $G1 + G2 + G3$ liefert die Aussage:

$$G1 + G2 + G3 = 2.528447790511657942 \dots > h$$

und somit:

$$g = G1 + G2 + G3 + R1 + R2 > h$$

Vorgehensweise (2):

In der Mathematik gibt es eine bevorzugte Methode, eine Näherungslösung über eine Partialsumme herbeizuführen. Denn die Summe von g kann auch in dieser Form ausgedrückt werden:

$$g = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{A_p}{p!}$$

wobei $A_p \geq 1$ und ganzzahlig ist sowie $p = Q(n) \cdot S(n)$ beschreibt.

Eine Näherungslösung ist dann:

$$g \approx g_k = \sum_{p=1}^k \frac{A_p}{p!}$$

sofern k groß genug gewählt wird.

Für $k = 31$ ergibt sich beispielsweise die Summe:

$$g \approx g_{31} = \sum_{p=1}^{31} \frac{A_p}{p!}$$

$$\begin{aligned} g_{31} = & 1/1! + 2/2! + 2/3! + 4/4! + 2/5! + 8/6! + 2/7! + 10/8! + 8/9! + 11/10! \\ & + 1/11! + 33/12! + 1/13! + 15/14! + 31/15! + 37/16! + 1/17! + 61/18! \\ & + 1/19! + 90/20! + 57/21! + 20/22! + 1/23! + 204/24! + 71/25! + 20/26! \\ & + 91/27! + 188/28! + 1/29! + 381/30! + 1/31! \end{aligned}$$

dabei ist die Größenordnung von $\frac{1}{31!} = 8.22 \dots \cdot 10^{-33}$.

$$g_{31} = 2.528447790511657942 \dots > h$$

Für $k = 18$ wäre der Nachweis $g_{18} > h$ ebenfalls schon gelungen.