

18.November 2025

## Die Statik beim Stapeln von Zylinderrollen zu einer gleichseitigen Dreiecksform

von  
Kai-Uwe Ekrutt

Das Übereinanderlegen von zylindrischen Körpern gleicher Art mag eine so alltägliche Angelegenheit zu sein, dass sie uns selten als fragwürdig erscheint. Die spezielle Problematik zeigt sich jedoch, sobald ein Auftürmen von Zylinderrollen erfolgen soll, wenn keine seitliche Fixierung gegen das Wegrollen existiert. Im Rahmen dieser Aufgabenstellung soll die Stapelung von Zylindern in Form eines gleichseitigen Dreiecks auf einer glatten Ebene betrachtet werden. Und hierbei stellen sich dann sehr wohl die zwingenden Fragen, welche physikalischen Voraussetzungen vorliegen müssen, damit sich ein solches Konstrukt im Gleichgewicht befindet und wie hoch die Zylinder überhaupt gestapelt werden können?

Angesichts dieser eher sehr einfachen Problemstellung soll bei der weiteren Betrachtung von folgenden idealisierten Prämissen ausgegangen werden: Die Zylinder sind vom Durchmesser her alle identisch und perfekt kreisrund. Sie sind außerdem aus demselben homogenen Material und besitzen alle die gleiche Masse und eine einheitliche Oberflächenbeschaffenheit mit gleichen Eigenschaften. Als Untergrund dient eine horizontale Ebene, deren Oberfläche ebenfalls einheitlich gleich ist.

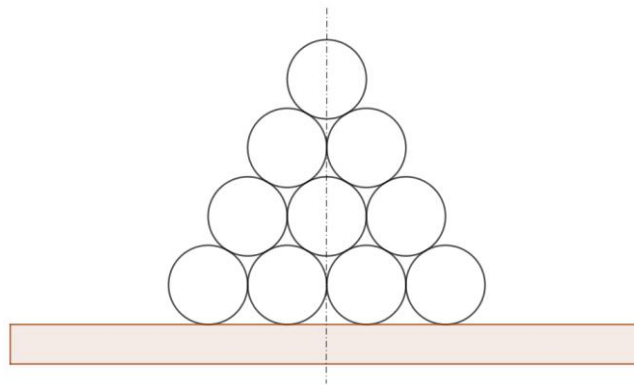


Bild 1: Zylinder in 4 Lagen übereinander gestapelt auf einer Ebene (nur Beispiel)

Neben der idealisierten Vorgabe von Material, Form und Gestalt der Zylinder müssen noch weitere Bedingungen als gesetzt angenommen werden. Zuerst einmal gehen wir davon aus, dass es sich hierbei um ein symmetrisches Problem handelt. Alle rechts von der Symmetrielinie wirkenden Kräfte und Momente werden in gespiegelter Form auch auf der linken Seite vorliegen. Daher muss bei der Ableitung der Gleichgewichtsbedingungen auch nur eine Hälfte des Systems betrachtet werden.

Die Zylinder, die unter ihrer eigenen Last miteinander in Kontakt treten, sind als starre Körper aufzufassen, welche sich theoretisch nicht verformen. Man könnte sich natürlich überlegen, ob die geringfügig elastischen Abplattungen an den linienförmigen Kontaktstellen in Betracht gezogen werden und somit auf ein Problem der Elastostatik führen. Mittels der sogenannten „Theorie des Halbraumes unter Linien- und Punktbelastungen“, deren Ausgangspunkt die Boussinesqschen Formeln darstellen und die schließlich zu den Lösungen von Hertz führen (Hertzsche Pressung), wäre eine rein akademische Beleuchtung des Sachverhalts möglich. Sie wäre aber äußerst komplex und mit sehr hohem Rechenaufwand verbunden. Das wäre dann eine ingenieurwissenschaftliche Aufgabenstellung, die zum Beispiel über die Finite-Elemente-Methode (FEM) gelöst werden könnte. Dieser hohe Anspruch soll hier nicht erhoben werden.

Welche zu erwartenden Konsequenzen resultieren nun daraus, dass die Zylinder als „ideal“ starre Körper angesehen werden? Eine Antwort liefert die Betrachtung des Gegenbeispiels, wenn wir es also mit einem nicht formstabilen zylindrischen Körper zu tun haben. So bereitet das Auftürmen von beispielsweise Toilettenpapierrollen oder auch Papprollen weitaus weniger Probleme. Zum einen hilft natürlich der hohe Haftreibungswert zwischen den zylindrischen Körpern, dass dieser nicht so schnell zusammenfällt. Aber auch die Deformation an den Kontaktstellen und die Formabweichung vom Zylinder hin zum Oval werden eine stabilisierende Rolle bei der Gleichgewichtsthematik spielen. Die Starrkörperbetrachtung wird also empfindlicher gegenüber jeglichen Störungen reagieren und damit eher aus dem Gleichgewicht kommen, wenn die notwendigen Haftreibungswerte zwischen den Zylindern und zwischen Zylinder/Untergrund nicht ausreichend hoch sind.

Die folgende Betrachtung zielt also darauf ab, die benötigten Mindest-Haftreibungswerte zwischen den Zylindern ( $\mu_{1\min}$ ) und zwischen Zylinder und Kontaktebene ( $\mu_{2\min}$ ) zu bestimmen, damit das Konstrukt im Gleichgewichtszustand verharren kann.

Bevor wir zu den Berechnungen kommen, muss noch eine Erklärung zum Begriff eines „statisch unbestimmten Systems“ folgen. Da wir uns ja durch die vereinfachende Starrkörperbetrachtung von der Elastostatik verabschiedet haben, holen wir uns über die Hintertür ein anderes Problem ins Haus. Es muss nämlich geprüft werden, ob die Gleichgewichtsbedingungen (Anzahl der Gleichungen) insgesamt ausreichen, um alle Unbekannten (Kräfte/Momente) berechnen zu können. Für jeden mechanisch freigeschnittenen Zylinder ergeben sich bis zu maximal 3 Gleichungen für die Gleichgewichtsbedingungen und für jede Kontaktberührung entstehen bis zu 2 unbekannte Kräfte. Unter Ausnutzung der Symmetrie muss man für das Gleichungssystem nur eine Hälfte betrachten (in diesem Fall die linke Seite).

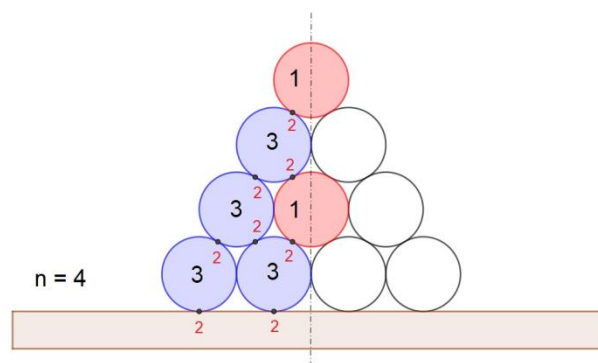


Bild 2: Beispiel mit vier Lagen ( $n=4$ ): Anzahl an Gleichungen je Zylinder und der unbekannten Kräfte je wirksamen Kontaktpunkt

Anhand des Bildes 2 ist ersichtlich, welcher Zylinder wie viele Gleichungen beisteuern kann und welche Anzahl an unbekannten Kräften zu berechnen ist. Hierbei ist zu beachten, dass die Kontaktpunkte in horizontaler Richtung zwischen den Zylindern kräftemäßig als unwirksam erachtet werden und somit vernachlässigt werden und keine weitere unbekannte Kraft ins Spiel bringt. Gewissermaßen könnte man sich dort vorstellen, dass an diesen Stellen eine „unendlich“ kleine Lücke zwischen den Zylindern vorhanden ist. Geometrisch bleibt dabei alles gleich, aber es werden dort keine Kräfte übertragen.

In Abhängigkeit von der Anzahl der Zylinder-Lagen „n“ kann man nun die Menge an Gleichungen „G<sub>n</sub>“ bestimmen, die zur Verfügung stehen.

$$G_n = \frac{3}{4}n^2 + \frac{n}{2} - \frac{1}{4} \quad , \text{ wenn n ungerade ist} \quad (1a)$$

$$G_n = \frac{3}{4}n^2 + \frac{n}{2} \quad , \text{ wenn n gerade ist} \quad (1b)$$

$$G_n = \left\lfloor \frac{3}{4}n^2 + \frac{n}{2} \right\rfloor \quad , \text{ allgemein für n mit unterer Gaußklammer} \quad (1c)$$

Die Anzahl der unbekannten Kräfte „U<sub>n</sub>“ errechnet dagegen mit:

$$U_n = n^2 \quad (2)$$

Daraus folgt dann die statische Unbestimmtheit „S<sub>n</sub>“ des Systems:

$$S_n = U_n - G_n = n^2 - \left\lfloor \frac{3}{4}n^2 + \frac{n}{2} \right\rfloor \quad (3)$$

Damit ergeben sich für die ersten Fälle n= 1 ... 4 folgende Werte:

$$n = 1: \quad S_1 = 0 \quad \text{statisch bestimmt und somit lösbar}$$

$$n = 2: \quad S_2 = 0 \quad \text{statisch bestimmt und somit lösbar}$$

$$n = 3: \quad S_3 = 1 \quad \text{einfach statisch unbestimmt!}$$

$$n = 4: \quad S_4 = 2 \quad \text{zweifach statisch unbestimmt!!}$$

$$n = 5: \quad S_5 = 4 \quad \text{vierfach statisch unbestimmt!!!!}$$

Man sieht, dass mit höherer Lagenzahl n auch die statische Unbestimmtheit wächst. Das Gleichungssystem ist dann ohne weitere Vorgaben nicht mehr lösbar. Insofern würde eine Berechnung des Gleichgewichts nur bis zur zweiten Lage möglich sein! Wir werden jedoch später noch sehen, dass für n=3 (mit einem freien Parameter) und für n=4 (mit zwei freien Parametern) trotzdem eine Analyse möglich ist, welche notwendigen Haftreibwerte vorliegen müssen, damit

überhaupt ein Gleichgewichtszustand eintreten kann. Das ist zwar nicht die geforderte eindeutige Lösung des Gleichgewichtsproblems, aber immerhin eine adäquate Betrachtung des möglichen Lösungsraumes, in der man die benötigten Reibwerte miteinander vergleichen kann.

### **n=1: Der Solo-Zylinder**

Starten wir mit dem ersten Fall  $n=1$ , der eigentlich kein Problem darstellt, weil ein einziger Zylinder stets auf der unteren Ebene ruht. Es herrscht immer ein Gleichgewicht ohne benötigte Haftreibbedingungen, da der Zylinder keinen Kontaktpartner hat und nur eine direkte Auflagerreaktion mit dem Untergrund hervorruft, die gleich der Gewichtskraft  $F_G$  des Zylinders ist. Da diese Ebene horizontal ist, werden am Untergrund weder eine Haftreibung noch eine Rollreibung benötigt, da die Kräfte nur vertikal wirken.

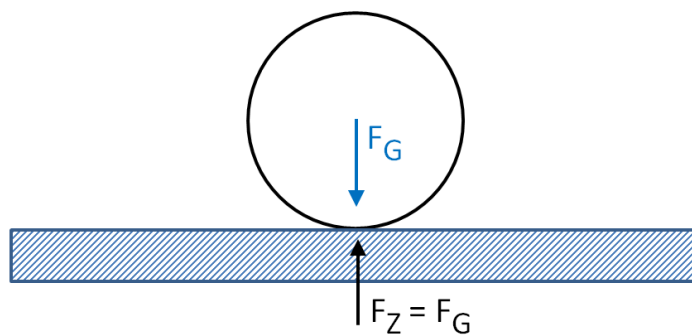


Bild 3: Im Fall  $n=1$  ist die Auflagerreaktion gleich der Gewichtskraft

### **n=2: Das Stapeln von 3 Zylindern**

Für den nächsthöheren Fall, der weiterhin eine eindeutige Lösung liefert, müssen die Gleichgewichtsbedingungen zur Berechnung der 4 unbekannten Kontaktkräfte aufgestellt werden.

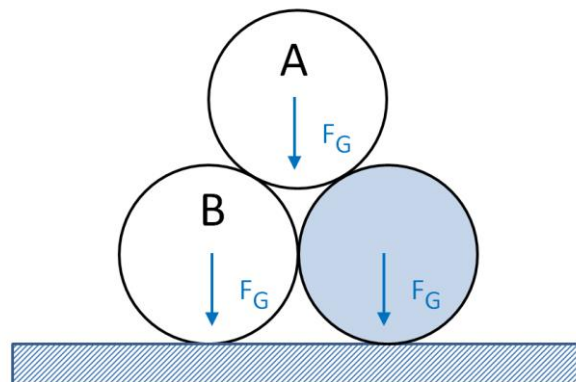


Bild 4: Zylinderstapel im Fall  $n=2$

Die freigeschnittenen Zylinder A und B:

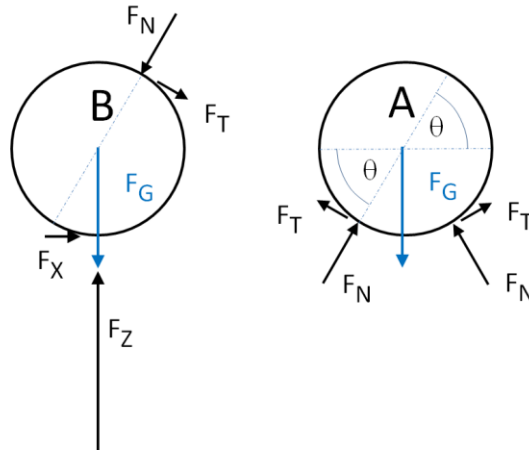


Bild 5: Kräfte an den beiden Zylindern

Die Gleichgewichtsbedingungen für die Zylinder A und B:

Für den Zylinder A haben wir nur eine Gleichgewichtsbedingung in vertikaler Richtung, die wir nutzen können, da hier die Symmetrie der Kräfte schon ausgenutzt wird und die Normalkraft und Tangentialkraft auf beiden Seiten gleichzusetzen sind. Dadurch entfallen die Kraftbedingung in horizontaler X-Richtung und die Momenten-Bedingung.

$$\frac{F_G}{2} = F_N \cdot \sin(\theta) + F_T \cdot \cos(\theta) = F_N \cdot (\sin(\theta) + m_1 \cdot \cos(\theta)) \quad (4.1a)$$

$$\text{mit } m_1 = \frac{F_T}{F_N} \quad \text{und} \quad \theta = 60^\circ \quad (4.1b)$$

Für Zylinder B können dann alle drei Gleichgewichtsbedingungen aufgestellt werden.

$$F_Z = F_N \cdot (\sin(\theta) + m_1 \cdot \cos(\theta)) + F_G = F_N + F_G = F_G \cdot \frac{3}{2} \quad (4.2)$$

$$F_X = F_N \cdot (\cos(\theta) - m_1 \cdot \sin(\theta)) \quad (4.3)$$

$$F_T = F_X = m_1 \cdot F_N \quad (4.4)$$

Aus (4.3) und (4.4) lässt sich dann das Kraftverhältnis  $m_1$  berechnen.

$$m_1 = \cos(\theta) - m_1 \cdot \sin(\theta) \rightarrow m_1 = \frac{\cos(\theta)}{1 + \sin(\theta)} = 2 - \sqrt{3} \approx 0.268 \dots \quad (4.5)$$

Setzt man den Wert von  $m_1$  in Gleichung (4.1a) dann resultiert daraus die Normalkraft und der Rest der unbekannten Kräfte:

$$F_N = \frac{F_G}{2} \quad (4.6)$$

$$F_X = F_T = m_1 \cdot \frac{F_G}{2} \quad (4.7)$$

Abschließend beschreiben wir das Kräfteverhältnis zwischen  $F_X$  und  $F_Z$  über  $m_2$ , womit dann auch zwei Parameter vorhanden sind, die eine Aussage über die notwendige Haftreibung zulassen.

$$\frac{F_X}{F_Z} = m_2 = \frac{m_1}{3} = \frac{1}{3} \cdot (2 - \sqrt{3}) \approx 0.0893 \dots \quad (4.8)$$

Definieren wir die benötigten Haftreibungswerte zwischen den Zylindern und zwischen Zylinder/Ebene nach folgender Art:

$$\mu_{1min}(n): \quad \text{minimaler Haftreibungswert zwischen den Zylindern} \quad (5)$$

$$\mu_{2min}(n): \quad \text{minimaler Haftreibungswert zwischen Zylindern/Ebene} \quad (6)$$

Für den Fall  $n=2$  gilt dann als Voraussetzung:

$$\mu_{1min}(2) \geq m_1 = 2 - \sqrt{3} \quad (7)$$

$$\mu_{2min}(2) \geq m_2 = \frac{1}{3} \cdot (2 - \sqrt{3}) \quad (8)$$

Unterschreiten bei der Materialpaarung (Kontaktberührung) die Haftreibungswerte nur einen dieser beiden Werte, dann bricht das Gleichgewicht zusammen und die Zylinder rollen auseinander.

Sehr interessant am Ergebnis ist, dass der Haftreibungswert zwischen Zylinder und Untergrund weitaus geringer ausfällt als der zwischen den Zylindern. Die Oberflächenbeschaffenheit des Untergrundes darf also durchaus etwas „glatter“ ausfallen als die der Zylinder! Das ist ein Merkmal, welches generell bei größerem  $n$ , also  $n>2$ , bestehen bleibt, weil man den untersten Zylinder ganz außen immer separat vom Rest des Systems betrachten kann. Die Gleichungen (4.3), (4.4) und (4.5) werden als Bedingung immer zutreffen, auch wenn die Normalkraft  $F_N$  gar nicht bekannt ist. Hinsichtlich  $m_2$  muss dann weiterhin gelten:

$$m_2 = \frac{F_N}{F_N + F_G} \cdot m_1 \rightarrow m_2 < m_1 \rightarrow \mu_{2min}(n) < \mu_{1min}(n) \quad (9)$$

D.h., schon im einfachsten Fall ( $n=2$ ) können wir zu der Erkenntnis gelangen, dass fortan das Gleichgewicht im Wesentlichen vom minimalen Haftreibungswert  $\mu_{1min}(n)$  abhängen wird.

### n=3: Das Stapeln von 6 Zylindern

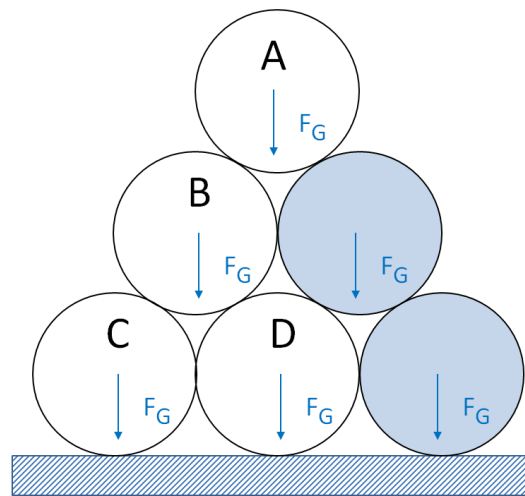


Bild 6: Zylinderstapel im Fall n=3

Für diesen Fall werden wir beginnen, eine Bezeichnungssystematik der Kräfte einzuführen, die sich auf die Kontaktpartner beziehen. Normalkräfte werden mit dem Buchstaben „N“ und die Tangentialkräfte mit „T“ gekennzeichnet gefolgt von den Bezeichnungen der beiden Kontaktpartner.

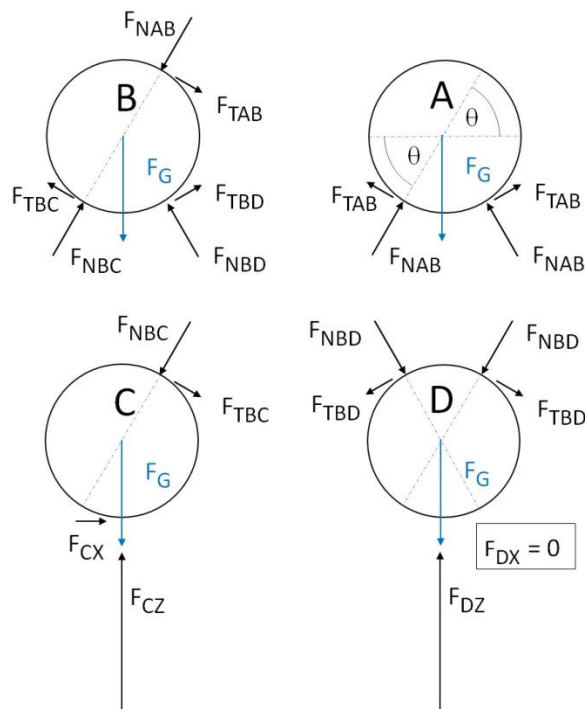


Bild 7: Kräftebezeichnungen im Fall n=3

Aus den Zylindern A und D können wir jeweils nur eine Gleichung schöpfen, während die Zylinder B und C jeweils drei Gleichungen liefern, sodass ein Gleichungssystem mit 8 Gleichungen entsteht bei insgesamt 9 unbekannten Kräften. Die letzte noch fehlende Gleichung ersetzen wir durch eine sinnvolle Zusatzforderung, die erfüllt werden muss.

Die Gleichgewichtsbedingungen für die Zylinder A bis D:

Für Zylinder A und C sind ja quasi schon die Gleichungen (4.1) bis (4.4) aus dem Fall  $n=2$  bekannt. Diese wenden wir auf die neue Bezeichnungsweise an, wobei beim Zylinder C nicht die drei originalen Aussagen als Gleichungen verwendet werden, sondern eine Abwandlung davon. Die Bezeichnungen der Relationen am untersten Zylinder links  $m_1$  und  $m_2$  werde ich aber beibehalten.

$$\frac{F_G}{2} = F_{NAB} \cdot \sin(\theta) + F_{TAB} \cdot \cos(\theta) = F_{NAB} \cdot (\sin(\theta) + m_{AB} \cdot \cos(\theta)) \quad (10.1a)$$

$$\text{mit} \quad m_{AB} = \frac{F_{TAB}}{F_{NAB}} \quad \text{und} \quad \theta = 60^\circ \quad (10.1b)$$

$$F_{CZ} = F_{NBC} \cdot (\sin(\theta) + m_1 \cdot \cos(\theta)) + F_G = F_{NBC} + F_G \quad (10.2)$$

$$F_{CX} = F_{NBC} \cdot (\cos(\theta) - m_1 \cdot \sin(\theta)) = F_{NBC} \cdot (2 - \sqrt{3}) \quad (10.3a)$$

$$F_{CX} = F_{CZ} \cdot m_2 \quad (10.3b)$$

$$F_{TBC} = F_{CX} = F_{NBC} \cdot m_1 = F_{NBC} \cdot (2 - \sqrt{3}) \quad (10.4)$$

Der Zylinder B liefert diese drei Gleichungen:

$$0 = F_{NBC} - F_{NAB} + F_{NBD} \cdot (\cos(\theta) + m_{BD} \cdot \sin(\theta)) - F_G \cdot \sin(\theta) \quad (10.5a)$$

$$\text{mit} \quad m_{BD} = \frac{F_{TBD}}{F_{NBD}} \quad (10.5b)$$

$$0 = F_{TAB} - F_{TBC} - F_{NBD} \cdot (\sin(\theta) - m_{BD} \cdot \cos(\theta)) + F_G \cdot \cos(\theta) \quad (10.6)$$

$$F_{TBD} = F_{TAB} + F_{TBC} \quad (10.7)$$

Die letzte Gleichung erhalten wir mit Zylinder D:

$$F_{DZ} = F_G + 2 \cdot F_{NBD} \cdot (\sin(\theta) + m_{BD} \cdot \cos(\theta)) \quad (10.8)$$

Um das Gleichungssystem lösen zu können, wird einfach ein freier Parameter definiert, der ein bestimmtes Intervall durchlaufen soll. Hier bietet sich beispielsweise die Vertikalkraft  $F_{CZ}$  am Zylinder C an, da hier die minimalen und maximalen Werte bekannt sind. Diese Kraft muss mindestens die einfache Gewichtskraft  $F_G$  haben, darf aber nicht größer als  $2.5 \cdot F_G$  sein, weil die vertikalen Auflagerreaktionen am Untergrund in Summe die Gewichtskraft von  $6 \cdot F_G$  besitzen müssen.

$$F_{CZ} = (1.0 \dots 2.5) \cdot F_G = (1 + X) \cdot F_G \quad \text{freier Parameter } X \quad (10.9)$$



Lässt man den freien Parameter das Intervall durchlaufen, dann ergeben sich für die eingeführten Relationen  $m_{AB}$  und  $m_{BD}$  betragsmäßig Werte, die je nach Gleichgewichtssituation größer als unser bekanntes  $m_1$  sind. Im folgenden Diagramm (Bild 8) sind die verschiedenen  $m$ -Werte über einen Laufparameter  $X$  abgebildet, sodass sich die Auflagerreaktionen  $F_{CZ} = (1.0 \dots 2.0) \cdot F_G$  zuordnen lassen.

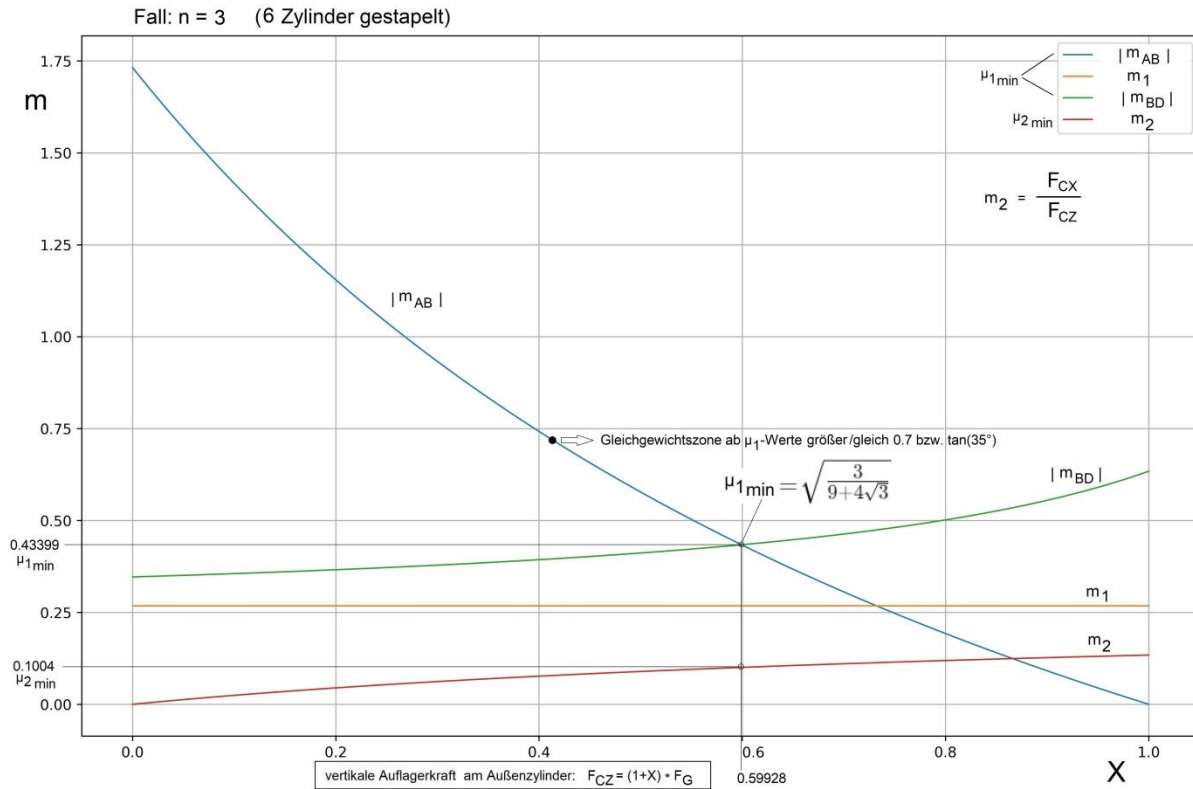


Bild 8: Diagramm mit dem Schnittpunkt für  $\mu_{1min}$  im Fall  $n=3$  sowie der dazugehörige Wert für  $\mu_{2min}$

Im Diagramm wird ersichtlich, dass die beiden Relationen  $m_{AB}$  und  $m_{BD}$  gegenläufig sind. Ein Gleichgewicht kann sich daher nur einstellen, wenn zwischen den Zylindern mindestens eine Haftreibung vorliegt, die größer oder gleich dem Wert entspricht, der sich mit dem Schnittpunkt von  $m_{AB}$  und  $m_{BD}$  ergibt.

Für den Fall  $n=3$  liegen somit höhere notwendige Haftreibungswerte vor:

$$\mu_{1min}(3) \geq \sqrt{\frac{3}{9+4\sqrt{3}}} \approx 0.4339875 \dots \quad (11)$$

$$\mu_{2min}(3) \geq \frac{1}{2} \left( 2 - \sqrt{3} - \sqrt{\frac{1}{11} \cdot \left( 37 - \frac{64}{\sqrt{3}} \right)} \right) \approx 0.1004055 \dots \quad (12)$$

Im Diagramm wurden die Kurven für  $m_{AB}$  und  $m_{BD}$  als Beträge angegeben. Der Grund liegt darin, dass bei der Definition des mechanischen Modells eine Vorauswahl getroffen wird, welche Orientierung (also Richtung) die unbekannten Kräfte haben sollen. Bei den Normalkräften kann man nichts falsch machen, denn als Druckkräfte können sie nur in die eine Richtung wirken, nämlich zum Zentrum des Zylinders. Bei den Tangentialkräften sieht die Sache etwas schwieriger aus. Wählt man die falsche Richtung, dann zeigt sich bei der Auflösung des Gleichungssystems, dass die entsprechende Kraft dann ein negatives Vorzeichen bekommt. Ein Vorzeichenwechsel bei den Werten für  $m_{AB}$  und  $m_{BD}$  hätte zur Folge, dass z.B. eine der Kurven im Negativen verläuft, während die andere im Positiven liegt. Dann würde man keinen Schnittpunkt mehr zwischen diesen beiden Kurven finden! Bei den Betragswerten ist diese Gefahr nicht gegeben.

Da wir nun die Verläufe der  $m$ -Werte aus dem Diagramm kennen, ließe sich das Gleichungssystem auch ohne den Laufparameter  $X$  für den Spezialfall lösen, bei dem die geringsten Haftreibwerte gefordert sind. Statt Gleichung (10.9) wählt man dann:

$$\frac{m_{AB}}{m_{BD}} = \frac{F_{TAB}}{F_{NAB}} \cdot \frac{F_{NBD}}{F_{TBD}} = \pm 1 \quad \text{bzw.} \quad \left| \frac{m_{AB}}{m_{BD}} \right| = \left| \frac{F_{TAB}}{F_{NAB}} \cdot \frac{F_{NBD}}{F_{TBD}} \right| = 1 \quad (13)$$

Schlussendlich, wenn man sich die Mühe macht und das Gleichungssystem löst, dann sollten sich folgende Lösungsgleichungen herausstellen:

$F_{NAB} = \frac{\sqrt{3}}{6} (X + 1)$ $F_{TAB} = \frac{1}{2} - \frac{X}{2}$ $F_{NBC} = X$ $F_{TBC} = X (2 - \sqrt{3})$ $F_{CZ} = 1 + X$ $F_{CX} = X (2 - \sqrt{3})$ $F_{NBD} = -\frac{7\sqrt{3}}{6} X + X + \frac{5\sqrt{3}}{6}$ $F_{TBD} = -\sqrt{3} X + \frac{3}{2} X + \frac{1}{2}$ $F_{DZ} = 4 - 2X$ <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block; margin-top: 10px;"> <math>F_G = 1</math> </div>		$\frac{F_{TBD}}{F_{NBD}} = \frac{F_{TAB}}{F_{NAB}} \Rightarrow X^2 + (\sqrt{3} - 4) X + 1 = 0.$ $X \in [0, 1.5] \Rightarrow X = \frac{4 - \sqrt{3} - \sqrt{15 - 8\sqrt{3}}}{2}$ <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block; margin-top: 10px;"> <math>X = 0.599279931138</math> </div> <p style="margin-top: 20px;"><b>Numerische Lösung</b></p> <table border="0" style="width: 100%;"> <tr> <td><math>F_{NAB} = 0.461672349376</math></td> <td><math>\frac{F_{TAB}}{F_{NAB}} = 0.4339875123595 = m_{AB}</math></td> </tr> <tr> <td><math>F_{NBC} = 0.599279931138</math></td> <td></td> </tr> <tr> <td><math>F_{NBD} = 0.831675100643</math></td> <td><math>\frac{F_{TBC}}{F_{NBC}} = 0.2679491924311 = m_1</math></td> </tr> <tr> <td><math>F_{TAB} = 0.2003600344309</math></td> <td></td> </tr> <tr> <td><math>F_{TBC} = 0.1605765735886</math></td> <td><math>\frac{F_{TBD}}{F_{NBD}} = 0.4339875123595 = m_{BD}</math></td> </tr> <tr> <td><math>F_{TBD} = 0.3609366080195</math></td> <td></td> </tr> <tr> <td><math>F_{CZ} = 1.5992799311381</math></td> <td><math>\frac{F_{CX}}{F_{CZ}} = 0.1004055453096 = m_2</math></td> </tr> <tr> <td><math>F_{CX} = 0.1605765735886</math></td> <td></td> </tr> <tr> <td><math>F_{DZ} = 2.8014401377237</math></td> <td><math>m_{AB} = m_{BD} = \sqrt{3} \frac{1 - X}{1 + X} = \sqrt{\frac{3}{9 + 4\sqrt{3}}}</math></td> </tr> </table>	$F_{NAB} = 0.461672349376$	$\frac{F_{TAB}}{F_{NAB}} = 0.4339875123595 = m_{AB}$	$F_{NBC} = 0.599279931138$		$F_{NBD} = 0.831675100643$	$\frac{F_{TBC}}{F_{NBC}} = 0.2679491924311 = m_1$	$F_{TAB} = 0.2003600344309$		$F_{TBC} = 0.1605765735886$	$\frac{F_{TBD}}{F_{NBD}} = 0.4339875123595 = m_{BD}$	$F_{TBD} = 0.3609366080195$		$F_{CZ} = 1.5992799311381$	$\frac{F_{CX}}{F_{CZ}} = 0.1004055453096 = m_2$	$F_{CX} = 0.1605765735886$		$F_{DZ} = 2.8014401377237$	$m_{AB} = m_{BD} = \sqrt{3} \frac{1 - X}{1 + X} = \sqrt{\frac{3}{9 + 4\sqrt{3}}}$
$F_{NAB} = 0.461672349376$	$\frac{F_{TAB}}{F_{NAB}} = 0.4339875123595 = m_{AB}$																			
$F_{NBC} = 0.599279931138$																				
$F_{NBD} = 0.831675100643$	$\frac{F_{TBC}}{F_{NBC}} = 0.2679491924311 = m_1$																			
$F_{TAB} = 0.2003600344309$																				
$F_{TBC} = 0.1605765735886$	$\frac{F_{TBD}}{F_{NBD}} = 0.4339875123595 = m_{BD}$																			
$F_{TBD} = 0.3609366080195$																				
$F_{CZ} = 1.5992799311381$	$\frac{F_{CX}}{F_{CZ}} = 0.1004055453096 = m_2$																			
$F_{CX} = 0.1605765735886$																				
$F_{DZ} = 2.8014401377237$	$m_{AB} = m_{BD} = \sqrt{3} \frac{1 - X}{1 + X} = \sqrt{\frac{3}{9 + 4\sqrt{3}}}$																			

Das Ergebnis für  $\mu_{1min}(3) \approx 0.43399$  dokumentiert, dass man es in der Realität recht schwer haben wird, einen 3-lagigen Zylinderturm aufzubauen, ohne dass er zusammenstürzt. Zylinderstifte aus Stahl (unmagnetisch!), die zumeist eine geschliffene Oberfläche aufweisen, werden nicht geeignet sein, da der Haftreibwert weit darunter liegt. Auch im Fall  $n=2$  sollte es problematisch sein, ins Gleichgewicht zu kommen, weil die Kontaktpaarung Stahl auf Stahl meist unter dem Wert 0.20 liegt. Doch bei zylindrischen Kreidestücken mit einem Haftreibwert um 0.65 sollte es klappen!

## n=4: Das Stapeln von 10 Zylindern

Die Gleichgewichtsbedingungen für die Zylinder A bis F:

Zylinder A:

$$\frac{F_G}{2} = F_{NAB} \cdot \sin(\theta) + F_{TAB} \cdot \cos(\theta) = F_{NAB} \cdot (\sin(\theta) + m_{AB} \cdot \cos(\theta)) \quad (14.1a)$$

$$\text{mit } m_{AB} = \frac{F_{TAB}}{F_{NAB}} \quad \text{und } \theta = 60^\circ \quad (14.1b)$$

Zylinder B:

$$0 = F_{NBC} - F_{NAB} + F_{NBE} \cdot (\cos(\theta) + m_{BE} \cdot \sin(\theta)) - F_G \cdot \sin(\theta) \quad (14.2a)$$

$$\text{mit } m_{BE} = \frac{F_{TBE}}{F_{NBE}} \quad \text{und } m_{BC} = \frac{F_{TBC}}{F_{NBC}} \quad (14.2b)$$

$$0 = F_{TAB} - F_{TBC} - F_{NBE} \cdot (\sin(\theta) - m_{BE} \cdot \cos(\theta)) + F_G \cdot \cos(\theta) \quad (14.3)$$

$$F_{TBE} = F_{TAB} + F_{TBC} \quad (14.4)$$

Zylinder C:

$$0 = F_{NCD} - F_{NBC} + F_{NCF} \cdot (\cos(\theta) + m_{CF} \cdot \sin(\theta)) - F_G \cdot \sin(\theta) \quad (14.5a)$$

$$\text{mit } m_{CF} = \frac{F_{TCF}}{F_{NCF}} \quad (14.5b)$$

$$0 = F_{TBC} - F_{TCD} - F_{NCF} \cdot (\sin(\theta) - m_{CF} \cdot \cos(\theta)) + F_G \cdot \cos(\theta) \quad (14.6)$$

$$F_{TCF} = F_{TBC} + F_{TCD} \quad (14.7)$$

Zylinder D:

$$F_{DZ} = F_{NCD} \cdot (\sin(\theta) + m_1 \cdot \cos(\theta)) + F_G = F_{NCD} + F_G \quad (14.8)$$

$$F_{DX} = F_{NCD} \cdot (\cos(\theta) - m_1 \cdot \sin(\theta)) = F_{NCD} \cdot (2 - \sqrt{3}) \quad (14.9a)$$

$$F_{DX} = F_{DZ} \cdot m_{2D} \quad (14.9b)$$

$$F_{TCD} = F_{DX} = F_{NCD} \cdot m_1 = F_{NCD} \cdot (2 - \sqrt{3}) \quad (14.10)$$

Zylinder E:

$$\frac{F_G}{2} = F_{NEF} \cdot (\sin(\theta) + m_{EF} \cdot \cos(\theta)) - F_{NBE} \cdot (\sin(\theta) + m_{BE} \cdot \cos(\theta)) \quad (14.11a)$$

$$\text{mit } m_{EF} = \frac{F_{TEF}}{F_{NEF}} \quad (14.11b)$$

Zylinder F:

$$F_{FZ} = F_{NCF} \cdot (\sin(\theta) + m_{CF} \cdot \cos(\theta)) + F_{NEF} \cdot (\sin(\theta) + m_{EF} \cdot \cos(\theta)) + F_G \quad (14.12)$$

$$F_{FX} = F_{NEF} \cdot (\cos(\theta) - m_{EF} \cdot \sin(\theta)) - F_{NCF} \cdot (\cos(\theta) - m_{CF} \cdot \sin(\theta)) \quad (14.13a)$$

$$F_{FX} = F_{FZ} \cdot m_{2F} \quad (14.13b)$$

$$F_{FX} = F_{TEF} - F_{TCF} \quad (14.14)$$

An dieser Stelle ist es sinnvoll, sich ein paar Gedanken über die beiden Laufparameter zu machen, die noch einzuführen sind. Wie im Fall n=3 soll beim Zylinder D die vertikale Auflagerreaktion  $F_{DZ}$  dafür genutzt werden. Beim Zylinder F dürfen wir das nicht mehr tun, um einen zweiten Laufparameter zu definieren, weil die Auflagerkraft  $F_{FZ}$  direkt von  $F_{DZ}$  abhängig ist. Denn es gilt über das gesamte System gesehen:

$$2 \cdot F_{FZ} + 2 \cdot F_{DZ} = 10 \cdot F_G$$

Aber man kann beim Zylinder F eine andere Größe heranziehen, nämlich die Horizontalkraft  $F_{FX}$  bzw. die Relation  $m_{2F}$ . Hier könnte man von der Vermutung ausgehen, dass sich der Wert von  $m_{2F}$  zwischen  $-\tan(30^\circ) \dots +\tan(30^\circ)$  bewegt, der dann sogar den aktuell notwendigen Haftreibwert für den Fall n=3 ( $\mu_{1min}(3) \approx 0.43399$ ) einschließen würde.

Die Zusatzgleichungen für die beiden Laufparameter lauten somit:

$$F_{DZ} = (1.0 \dots 3.5) \cdot F_G = (1 + X) \cdot F_G \quad \text{freier Parameter X} \quad (14.15)$$

$$m_{2F} = \left( -\frac{1}{\sqrt{3}} \dots +\frac{1}{\sqrt{3}} \right) = Y \quad \text{freier Parameter Y} \quad (14.16)$$

Ziel ist es wieder, für ganz bestimmte Gleichgewichtssituationen möglichst niedrige m-Werte (betragsmäßig!) zu finden. Da das Gesamtsystem jetzt etwas komplexer ist als bei n=3, können sich eventuell auch mehrere Insellösungen zeigen, die dann zu bewerten sind. In jeder Insellösung gibt es dann eine untere Schranke für die notwendigen Haftreibwerte, die dann auch unterschiedlich ausfallen können.

Für die Analyse der m-Werte müssen also mehrere relevante Kontaktpunkte unter Beobachtung stehen, an denen sich möglicherweise betragsmäßig größere Werte einstellen könnten. Werte, die größer sind als die bekannte Relation  $m_1 = (2 - \sqrt{3})$ . Dafür kommen in Frage:

$$\begin{array}{lll} m_{AB} = \frac{F_{TAB}}{F_{NAB}} & m_{BC} = \frac{F_{TBC}}{F_{NBC}} & m_{BE} = \frac{F_{TBE}}{F_{NBE}} \\ m_{CF} = \frac{F_{TCF}}{F_{NCF}} & m_{EF} = \frac{F_{TEF}}{F_{NEF}} & m_{2F} = \frac{F_{FX}}{F_{FZ}} \end{array}$$

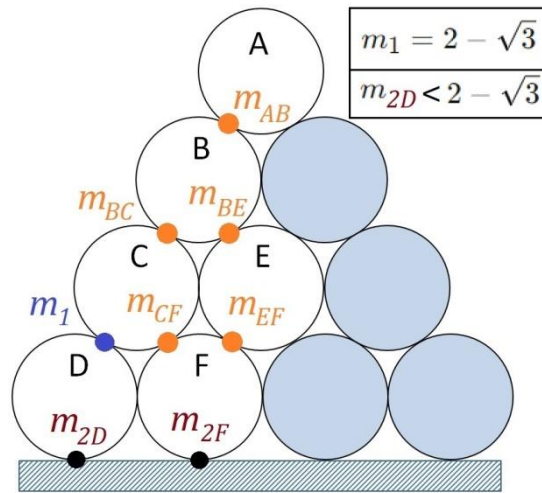
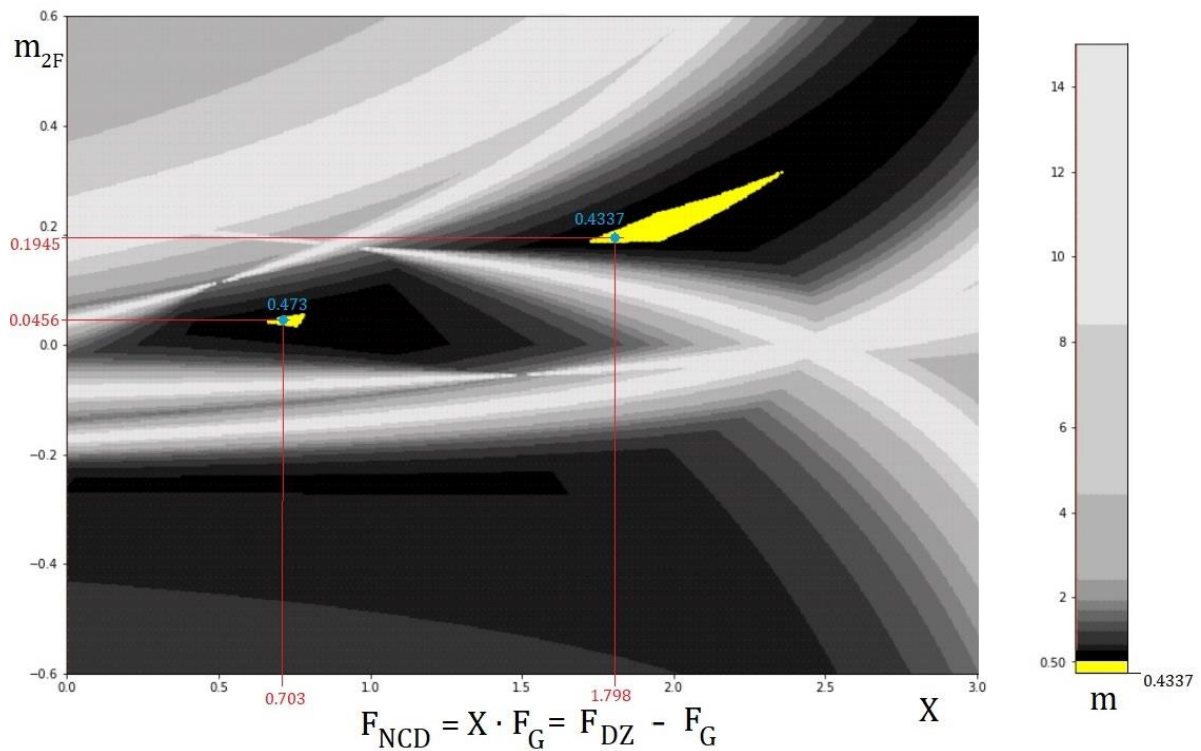


Bild 11: Kontaktpunkte und die dazugehörigen m-Werte

Für die Darstellung des benötigten Haftreibungwertes habe ich eine Graustufung verwendet. Die schwarzen Bereiche liegen bei etwa  $\mu=0.5$  bis  $0.75$  gefolgt von den Grautönen, die man der Legende entnehmen kann. Die gelben Bereiche sind dann noch einmal gesonderte Zonen, in denen sich lokale Minima für die benötigte Haftreibung zwischen den Zylindern befinden. Es gibt also zwei Gleichgewichtsgebiete mit kleineren Reibwerten. In einem Gebiet ist  $m = 0.4337$  der kleinste Wert und in der anderen Lösungsinsel ist der Wert mit  $0.473$  geringfügig höher gelegen.

Bild 12: Die zwei lokalen Minima des benötigten Haftreibungwertes als Funktion  $f(X, m_{2F})$

Damit hätte man eine Aussage, welcher Haftreibwert im Fall  $n=4$  mindestens benötigt würde:

$$\mu_{1min}(4)_1 \geq 0.43374 \dots < \mu_{1min}(3) \quad \text{im Bereich 1} \quad (15)$$

$$\mu_{1min}(4)_2 \geq 0.47296 \dots \quad \text{im Bereich 2} \quad (16)$$

Dabei ist der erste Wert nur unwesentlich kleiner als  $\mu_{1min}(3)$  und weicht erst in der 4. Stelle hinter dem Komma davon ab.

Diese beiden Lösungen würde man auch erhalten, wenn man anstatt der Laufparameter X und Y folgende betragsmäßige m-Werte gleichsetzen würde:

$$\text{Lösung im Bereich 1:} \quad m_{AB} = m_{EF} = -m_{CF} \quad (17)$$

$$\text{Lösung im Bereich 2:} \quad m_{AB} = m_{BE} = m_{CF} \quad (18)$$







Lösung 1		Lösung 2	
$X_{opt} = 1.797831142$	$Y_{opt} = 0.194547244$	$X_{opt} = 0.702954608$	$Y_{opt} = 0.045586303$
$F_{NAB} = 0.461724904$	$F_{TBC} = -0.34918457$	$F_{NAB} = 0.453512527$	$F_{TBC} = 0.184029435$
$F_{NBC} = 0.893800890$	$F_{TCD} = 0.481727402$	$F_{NBC} = 0.553100127$	$F_{TCD} = 0.188356119$
$F_{NCD} = 1.797831142$	$F_{TBE} = -0.148915571$	$F_{NCD} = 0.702954608$	$F_{TBE} = 0.398522695$
$F_{NBE} = 1.125828171$	$F_{TCF} = 0.132542825$	$F_{NBE} = 0.842614050$	$F_{TCF} = 0.372385554$
$F_{NCF} = -0.305580604$	$F_{DX} = 0.481727402$	$F_{NCF} = 0.787351144$	$F_{DX} = 0.188356119$
$F_{DZ} = 2.797831142$	$F_{FX} = 0.428425883$	$F_{DZ} = 1.702954608$	$F_{FX} = 0.150300110$
$F_{FZ} = 2.202168857$	$F_{NEF} = 1.293326560$	$F_{FZ} = 3.297045391$	$F_{NEF} = 1.348278795$
$F_{TAB} = 0.200269005$	$F_{TEF} = 0.560968709$	$F_{TAB} = 0.214493260$	$F_{TEF} = 0.522685665$
$m_{AB} = 0.43374096$		$m_{AB} = 0.47295994$	
$m_{BC} = -0.39067378$		$m_{BC} = 0.33272354$	
$m_{BE} = -0.13227202$		$m_{BE} = 0.47295994$	
$m_{CF} = -0.43374096$		$m_{CF} = 0.47295994$	
$m_{EF} = 0.43374096$		$m_{EF} = 0.38766883$	
$m_{2D} = 0.17217886$		$m_{2D} = 0.11060548$	
$m_{2F} = 0.19454724$		$m_{2F} = 0.04558630$	

Bild 13: numerische Ergebnisse für die beiden Lösungen (Werte normiert,  $F_G = 1$ )

$F_{NCD} = X$	$F_{TBC} = \frac{\sqrt{3}XY}{4} + \frac{XY}{2} - \frac{X}{4} - 2Y - \sqrt{3}Y + \frac{1}{2}$
$F_{DZ} = X + 1$	$F_{NBE} = -\frac{2\sqrt{3}XY}{3} - XY - \frac{\sqrt{3}X}{6} + 4Y + \frac{8\sqrt{3}Y}{3} + \frac{5\sqrt{3}}{12}$
$F_{DX} = X(2 - \sqrt{3})$	$F_{TBE} = \frac{3}{4} - \frac{X}{2}$
$F_{TCD} = X(2 - \sqrt{3})$	$F_{NCF} = \frac{3XY}{4} + \frac{\sqrt{3}XY}{2} - \frac{11\sqrt{3}X}{12} + X - 2\sqrt{3}Y - 3Y + \frac{5\sqrt{3}}{6}$
$F_{TCF} = \frac{\sqrt{3}XY}{4} + \frac{XY}{2} - \frac{X}{4} + X(2 - \sqrt{3}) - 2Y - \sqrt{3}Y + \frac{1}{2}$	$F_{NEF} = -\frac{5XY}{4} - \frac{\sqrt{3}XY}{2} - \frac{11\sqrt{3}X}{12} + X + 2\sqrt{3}Y + 5Y + \frac{5\sqrt{3}}{6}$
$F_{NAB} = \frac{XY}{4} + \frac{\sqrt{3}XY}{6} + \frac{\sqrt{3}X}{12} - \frac{2\sqrt{3}Y}{3} - Y + \frac{\sqrt{3}}{4}$	$F_{TEF} = -\frac{XY}{2} + \frac{\sqrt{3}XY}{4} - \sqrt{3}X + \frac{7X}{4} - \sqrt{3}Y + 2Y + \frac{1}{2}$
$F_{TAB} = -\frac{XY}{2} - \frac{\sqrt{3}XY}{4} - \frac{X}{4} + \sqrt{3}Y + 2Y + \frac{1}{4}$	$F_{FZ} = 4 - X$
$F_{NBC} = \frac{3XY}{4} + \frac{\sqrt{3}XY}{2} + \frac{5\sqrt{3}X}{12} - 2\sqrt{3}Y - 3Y + \frac{\sqrt{3}}{6}$	$F_{FX} = Y(4 - X)$

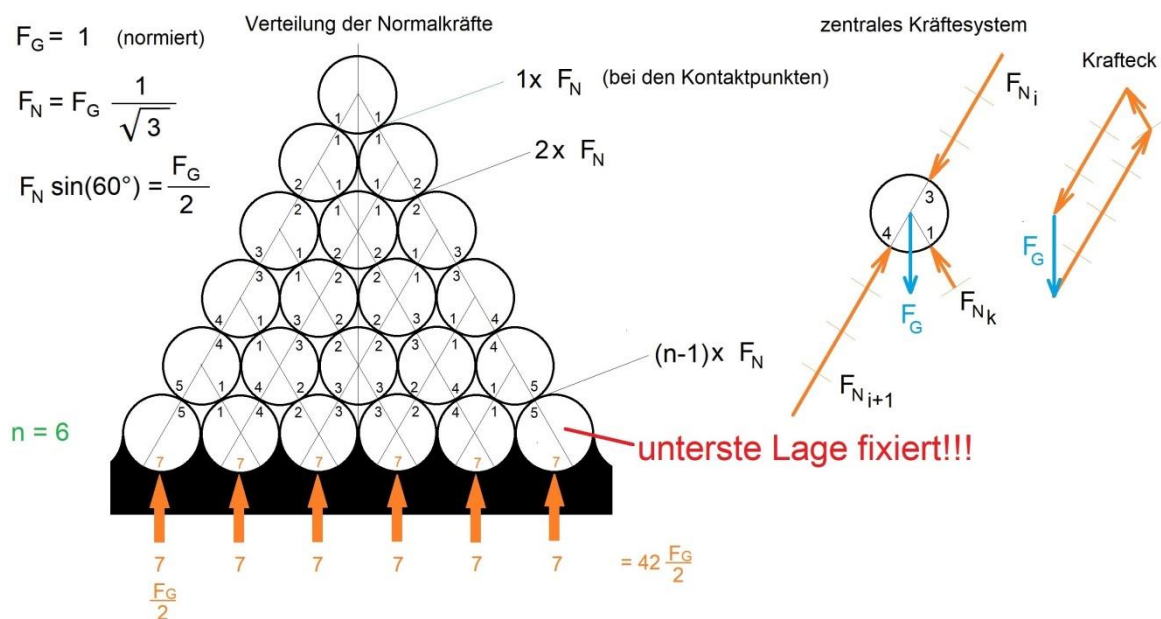
Bild 14: Lösungsgleichungen in Abhängigkeit von X und Y



Die Frage stellt sich nun, welcher dieser beiden Gleichgewichtszustände bevorzugt eintreten würde? Beide Situationen wären theoretisch möglich, wobei bei Lösung 1 einschränkend darauf hingewiesen werden kann, dass die vertikale Auflagerkraft zum Untergrund hin bei  $F_{DZ}$  größer ist als bei  $F_{FZ}$ . D.h., die äußeren Zylinder drücken mit einer höheren Kraft auf den Boden als die inneren Zylinder. Wenn im System überhaupt keine Reibungskräfte betrachtet würden, dann könnten die durchgeleiteten Lastkolonnen (es entstehen Kraftbrücken entlang einer Geraden unter  $60^\circ$ ) dazu führen, dass für jeden untenliegenden Zylinder dieselbe vertikale Auflagerkraft herauskommt (siehe dazu Bild 15). In der Regel erwartet man daher, dass die größeren Vertikalkräfte bei den Auflagerreaktionen (am Boden) zur Mitte hin zunehmen sollten, so wie die Lastverteilung der darüber befindlichen Zylinder es suggerieren würden. Dass bei den äußeren Zylindern hingegen die höchsten Vertikalkräfte auftreten würden, wäre ungewöhnlich und kurios. Daher plädiere ich persönlich eher für die Lösung 2, die mir von den Berechnungswerten her realistischer erscheint.

Das Verhältnis  $\frac{F_{DZ}}{F_{FZ}} = \frac{1.7}{3.3} < 1$  mutet daher eher an, als Gleichgewichtssituation einzutreten.

Die folgende Skizze zeigt, welche Normalkraftverteilung sich einstellen würde, wenn die unteren Zylinder alle fixiert sein würden. In diesem Fall bräuchten wir uns die Frage über die notwendigen Haftreibbedingungen nicht stellen. Zur Berechnung des Gleichgewichts reicht es dann, die Gleichungen für ein zentrales Kräftesystem aufzustellen bezüglich der wirkenden Normalkräfte, weil keine Tangentialkräfte auftreten. Für den Fall  $n=6$  (fixiert!) treten dann am Boden für die vertikalen Auflagerreaktionen stets dieselben Werte auf, nämlich  $F_{iZ} = 3.5 \cdot F_G$ .



Diese Verteilung der Normalkräfte gilt nur, wenn eine Fixierung unten vorliegt. In diesem Fall muss bei den oberen Lagen keine Haftreibung betrachtet werden.

Sobald Haftreibung ins Spiel kommt (Fixierung nicht vorhanden), müssen die Gleichgewichtsbedingungen der gesamten Lastkolonnen konsequent mit dem Haftreibeinfluss durchgerechnet / überprüft werden.

➡ Gleichungssystem

Bild 15: Verteilung der Normalkräfte bei fixierter Unterlage



Kehren wir aber zum eigentlichen Problem für den Fall  $n=4$  zurück. Bei den zwei Lösungen haben wir zunächst die Haftreibwerte zwischen den Zylindern betrachtet. Diese Prüfung ist aber auch bezüglich der notwendigen Haftung zwischen Zylinder und Untergrund noch nötig.

$$\mu_{2min}(4)_1 \geq 0.1945 \dots = m_{2F} \quad \text{im Bereich 1} \quad (17)$$

$$\mu_{2min}(4)_2 \geq 0.1106 \dots = m_{2D} \quad \text{im Bereich 2} \quad (18)$$

Einmal liegen die notwendigen Haftbedingungen beim inneren Zylinder ( $m_{2F}$ ) und einmal beim Außenzylinder ( $m_{2D}$ ).

Natürlich lassen sich die Achsen des Koordinatensystems mit anderen Parametern versehen und die Grafiken umrechnen. Die folgende Darstellung hat als Abszisse die Werte von  $m_{2D}$  und auf der Ordinate sind die Werte für  $m_{2F}$  aufgetragen. Bei der gelben Zone handelt es sich um  $m$ -Werte, die von  $m=0.434$  bis  $0.65$  reichen. Ein hoher Haftreibwert von  $0.65 \approx \tan(33^\circ)$ , der dazugehörige Reibungskegel besitzt also den Spitzenwinkel von  $66^\circ$ , findet man zum Beispiel bei trockener Tafelkreide vor. Zylindrische Kreidestücke können daher gut als Versuchsobjekt dienen, um experimentell herauszufinden, bis zu welcher Höhe sie sich auftürmen lassen.

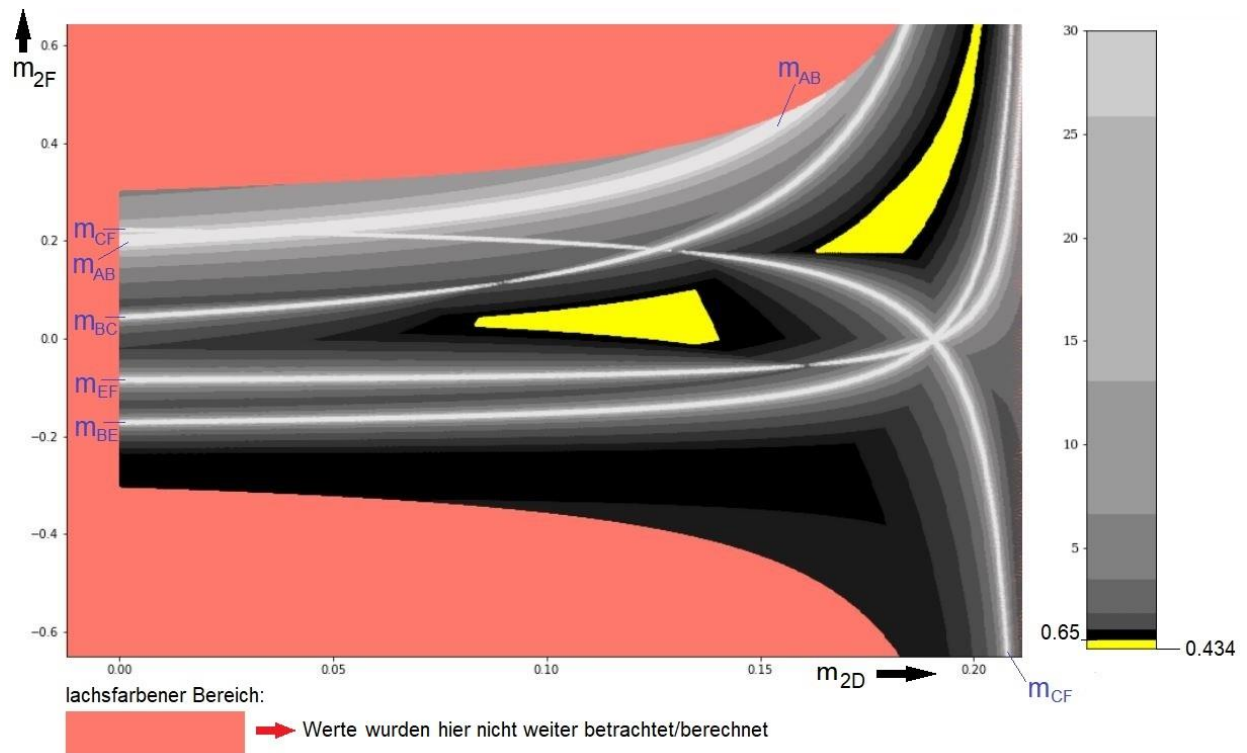


Bild 16: Gleichgewichtszonen (gelb) bis maximal  $m=0.65$  im Fall  $n=4$

Was die wirklichkeitsnahen Zylinder-Kreidestücke betrifft, so erkennt man in Bild 16, dass im gelben Bereich 2 (links) ein Gleichgewicht entstehen kann, wenn der Wert  $m_{2F} = 0$  ist. In diesem Fall tritt bei den inneren Zylindern am Boden einzig nur die vertikale Auflagerreaktion  $F_{FZ}$  auf. Eine Lösung diesbezüglich mit einem möglichst niedrigen Haftreibwert, der zwischen den Zylindern nötig wäre, zeigt die nächste Wertetabelle.

$$\begin{array}{l} X = 1 \\ Y = 0 \end{array}$$

$$F_{NAB} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.57735$$

$$F_{TAB} = 0$$

$$F_{NBC} = \frac{7}{4\sqrt{3}} \approx 1.01036$$

$$F_{TBC} = \frac{1}{4} = 0.25$$

$$F_{NCD} = 1$$

$$F_{TCD} = 2 - \sqrt{3} \approx 0.267949$$

$$F_{NBE} = \frac{\sqrt{3}}{4} \approx 0.43301$$

$$F_{TBE} = \frac{1}{4} = 0.25$$

$$F_{NEF} = 1 - \frac{1}{4\sqrt{3}} \approx 0.85566$$

$$F_{TEF} = \frac{9}{4} - \sqrt{3} \approx 0.517949$$

$$F_{NEF} = 1 - \frac{1}{4\sqrt{3}} \approx 0.85566$$

$$F_{TEF} = \frac{9}{4} - \sqrt{3} \approx 0.517949$$

$$F_{DZ} = 2$$

$$F_{DX} = 2 - \sqrt{3} \approx 0.267949$$

$$F_{FZ} = 3$$

$$F_{FX} = 0$$

$$m_{AB} = 0 \quad m_{2F} = 0$$

$$m_{BC} = \frac{\sqrt{3}}{7} \approx 0.24743$$

$$m_{BE} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.57735$$

$$m_{CF} = \frac{9\sqrt{3} - 12}{4\sqrt{3} - 1} \approx 0.605319$$

$$m_{EF} = \frac{9\sqrt{3} - 12}{4\sqrt{3} - 1} \approx 0.605319$$

$$m_{2D} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2} \approx 0.133974$$

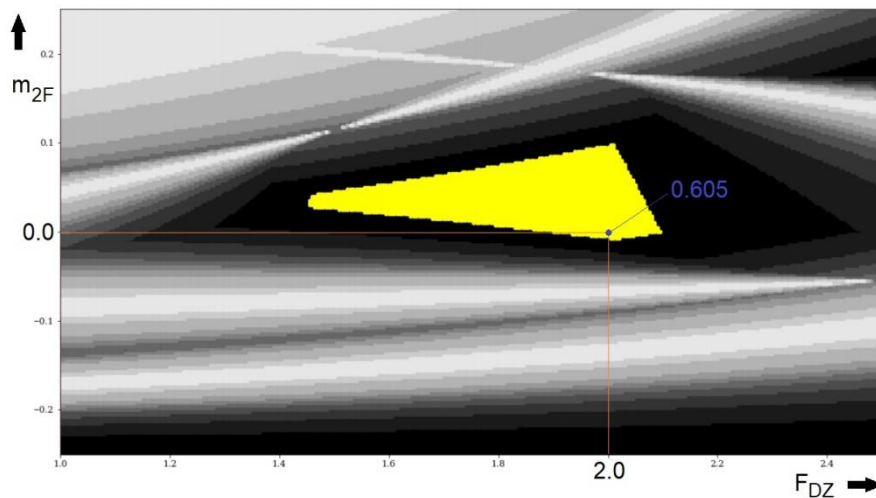


Bild 17: Gleichgewichtszone (gelb) mit dem Lösungspunkt bei  $X=1$  ( $F_{DZ} = 2$ ),  $Y=0$

Die Gleichgewichtssituation bei  $X=1$ ,  $Y=0$  bildet natürlich nur eine von mehreren möglichen Lösungen, die aber angesichts der vertikalen Auflagerkräfte  $F_{DZ} = 2$  und  $F_{FZ} = 3$  als sehr realistisch erscheint und auch die interessante Tatsache liefert, dass der oberste Zylinder nur eine reine Normalkraft ins System leitet. Dieser oberste „Schlussstein“ dient also nur zur Kraftdurchleitung ohne nötigen Reibschluss an dieser Stelle.

Die hellgrauen bis weißen Bezirke in den vorangegangenen Grafiken stellen Werte jenseits von Gut und Böse dar. Diese hellen Areale sind hinsichtlich der Gleichgewichtszustände „verbotene Zonen“ und trennen auch die beiden gelben Lösungsinseln voneinander.

Beim Experimentieren mit Kreidestücken konnte ich feststellen, dass das Auftürmen für die Fälle  $n=2$  und  $n=3$  kein Problem darstellte. Hingegen musste ich für den Fall  $n=4$  ein sehr glückliches Händchen beweisen, bis der Turm endlich stand, ohne dass die Außenzylinder seitlich abglitten. Es ist also möglich, mit einfacher Tafelkreide (Haftreibwert liegt bei etwa 0.65) die insgesamt 10 Zylinder aufzuschichten, wobei das Gleichgewicht relativ instabil ist. Es reichen schon kleinste Störungen aus und das Konstrukt fällt sofort zusammen. Außerdem sind die Kreidestücke fertigungsbedingt nicht alle einheitlich und können auch bei der Oberflächengüte (Porigkeit) Unterschiede aufweisen. Eine ganz wichtige Tatsache ist, dass die zylindrische Tafelkreide in Längsrichtung meist konisch zuläuft. Auf einer Länge von 80mm kann der Durchmesser (9.5 mm) um etwa 0,5 mm abnehmen! Daher sollte beim Experimentieren darauf geachtet werden, dass der große Durchmesser immer zu einer Front zeigt! Eine permanent wechselnde Bestückung beim Aufbau bereitet sonst Probleme mit dem geforderten Linienkontakt, die jeder Zylinder mit dem Nachbarn haben sollte.



Bild 18: Kreide-Experiment: Der Fall  $n=5$  ist praktisch nicht mehr realisierbar gewesen

Weitere Versuche, einen Turm mit insgesamt 15 Zylindern zu errichten ( $n=5$ ), sind bei mir leider gescheitert. Eine seitliche Flanke wollte immer abgleiten, so wie es Bild 18 (rechts) zeigt. Auch wenn der Versuch bei mir misslang, so heißt das nicht automatisch, dass für diesen speziellen Fall höhere Haftreibwerte eingefordert werden müssen. Es bestätigt eher das Problem, dass die zunehmende Störungsanfälligkeit und die Summe aller „Ungenauigkeiten“ im System, die dann vom definierten Idealzustand abweichen, das Konstrukt in Richtung Instabilität schieben. Die Chancen, irgendeine „Punktlandung“ bei einer der Lösungsinseln zu machen, schwinden mit der Zunahme von  $n$ .

Für die hier besprochenen Fälle kann also ein kleines Fazit abgegeben werden bezüglich der beiden Haftreibwerte:

$$\mu_{1min}(2) \geq 2 - \sqrt{3} \approx 0.267949 \dots \quad \mu_{2min}(2) \geq \frac{1}{3} \cdot (2 - \sqrt{3}) \approx 0.089316 \dots \quad (19)$$

$$\mu_{1min}(3) \geq \sqrt{\frac{3}{9+4\sqrt{3}}} \approx 0.4339875 \dots \quad \mu_{2min}(3) \geq 0.1004055 \dots \quad (20)$$

$$\mu_{1min}(4)_1 \geq 0.43374 \dots \quad \mu_{2min}(4)_1 \geq 0.1945 \dots \quad (21)$$

$$\mu_{1min}(4)_2 \geq 0.47296 \dots \quad \mu_{2min}(4)_2 \geq 0.1106 \dots \quad (22)$$

Theoretisch wäre es möglich, das Gleichungssystem für noch größere  $n$  aufzubauen. Jedoch steigt mit  $n > 4$  die statische Unbestimmtheit und damit auch die Anzahl der freien Parameter. Es werden sich somit diverse Lösungseinseln für ein mögliches Gleichgewicht anbieten, die alle separat zu betrachten sind. Diese Lösungen in einem mehrdimensionalen Raum sind nicht mehr sehr übersichtlich, sodass man eventuell mit anderen Fragestellungen an diese Thematik herantreten sollte. Fragen wie z.B.:

- Ab welchem  $n$  wird die Lastkolonne bei den äußeren Zylindern, gemäß einer Normalkraft-Verteilung wie in Bild 15, nicht mehr funktionieren?
- Liegt die Grenze des notwendigen Haftreibungswertes bei maximal  $\tan(30^\circ)$ ?
- Kann man (bei sehr großem  $n$ ) das komplette Abgleiten einer seitlichen Flanke als Kriterium für den „Zusammensturz“ nehmen?

Ich möchte daher versuchen, ein paar Teilantworten auf diese Fragen zu geben. Daher beginne ich mit der Untersuchung der Normalkraft-Verteilung der äußeren Zylinder, so wie es Bild 15 zeigt und die nur theoretisch zu einer gleichmäßigen Vertikalbelastung am Boden führen würde. Die Betrachtung beschränkt sich rein auf diese äußeren Zylinder, ohne weiter danach zu fragen, wie die weitere Kräfteverteilung bei den inneren Zylindern aussehen würde.

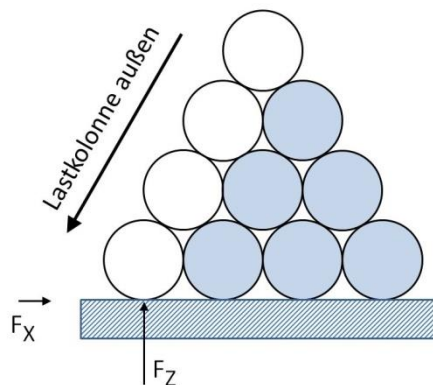


Bild 19: Separate Betrachtung der äußeren Lastkolonne bei gleichmäßiger Normalkraft-Verteilung

Aus Bild 15 ist ersichtlich, dass die Normalkräfte von Zylinder zu Zylinder um den Betrag von  $1 \cdot F_N$  zunehmen. Für die statische Betrachtung reicht es daher aus, nur die beiden unteren Zylinder zu behandeln und zwar für einen allgemeinen Fall  $n$ .

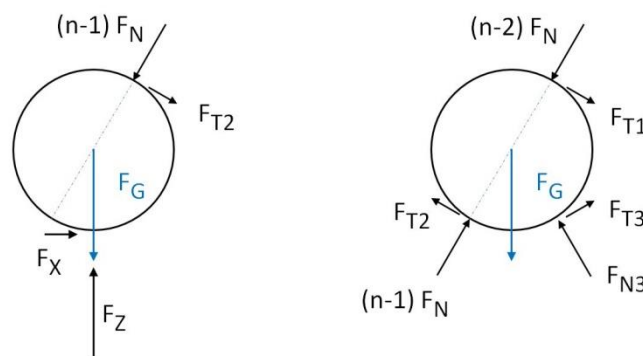


Bild 20: Kräfte an den beiden Zylindern

Aus dem linken freigeschnittenen Zylinder erhält man die bekannte Tangentialkraft:

$$F_{T2} = (n - 1) \cdot F_N \cdot (2 - \sqrt{3}) \quad (22)$$

Aus dem rechten freigeschnittenen Zylinder ergeben sich die Gleichungen:

$$0 = F_{T1} - F_{T2} + F_{T3} \cdot \cos(\theta) - F_{N3} \cdot \sin(\theta) + F_G \cdot \cos(\theta) \quad (23)$$

und

$$F_{T1} = F_{T3} - F_{T2} = F_{T3} - (n - 1) \cdot F_N \cdot (2 - \sqrt{3}) \quad (24)$$

Es soll jetzt überprüft werden, ab welchem  $n$  es zu dem Effekt kommt, dass einer der Außenzylinder herausgedrückt wird (dropping out). Das geschieht, sobald die Normalkraft  $F_{N3}$  ein negatives Vorzeichen bekommt, also Zugkräfte am Werke wären!

$F_{N3} \geq 0$ : Bedingung, dass die Zylinder ihre Position behalten (kein dropping out!)

Wenn die Normalkraft  $F_{N3}$  gegen Null geht, dann läuft auch die Tangentialkraft  $F_{T3}$  gegen Null. Für den Spezialfall werden nun die Gleichungen (23) und (24) umgeschrieben.

$$F_{N3} \cdot \sin(\theta) - F_{T3} \cdot \cos(\theta) = F_{T1} - F_{T2} + F_G \cdot \cos(\theta) \quad \rightarrow \quad F_{T1} - F_{T2} + F_G \cdot \cos(\theta) \geq 0$$

$$F_{T1} - (n - 1) \cdot F_N \cdot (2 - \sqrt{3}) + F_G \cdot \frac{1}{2} \geq 0 \quad (25)$$

und

$$F_{T1} + (n - 1) \cdot F_N \cdot (2 - \sqrt{3}) = F_{T3} \quad \rightarrow \quad F_{T1} + (n - 1) \cdot F_N \cdot (2 - \sqrt{3}) = 0 \quad (26)$$

und daraus folgen dann:

$$2 \cdot F_{T1} + F_G \cdot \frac{1}{2} \geq 0 \quad (27a)$$

und

$$-2 \cdot (n - 1) \cdot F_N \cdot (2 - \sqrt{3}) + F_G \cdot \frac{1}{2} \geq 0 \quad (27b)$$

Eine Gleichgewichtsbedingung haben wir dann noch für die Normalkraftrichtung:

$$0 = (n - 1) \cdot F_N - (n - 2) \cdot F_N - F_G \cdot \sin(\theta) \quad \rightarrow \quad F_N = F_G \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (28)$$

Gleichung (28) eingesetzt in (27) liefert dann die Bestimmungsgleichung für  $n$ :

$$\left( -2 \cdot (n - 1) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (2 - \sqrt{3}) + \frac{1}{2} \right) \cdot F_G \geq 0 \quad (29)$$

$$n \leq \frac{3}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 2.077 \dots \quad (30)$$

Resume:

Die Ungleichung für  $n$  zeigt an, dass ein Gleichgewicht ohne einen „drop out“ nur dann entsteht, wenn  $n=2$  vorliegt. Sobald  $n>2$  ist, wird die Tangentialkraft  $F_{T1}$  (mit negativem Vorzeichen!) so groß, dass die Normalkraft  $F_{N3}$  verschwindet. Man darf also im Vorwege behaupten, dass für größere  $n$  eine Normalkraftverteilung dieser Art niemals zu erwarten ist.

Es ist also davon auszugehen, dass die Normalkräfte durch den Einfluss der Haftreibung und über die dabei entstehenden Tangentialkräfte nach innen umgeleitet werden. Mit der Realität abgeglichen würde das bedeuten, dass die vertikalen Auflagerreaktionen demnach nach innen und zur Mittellinie zunehmen sollten, so wie man es intuitiv auch vermuten würde.

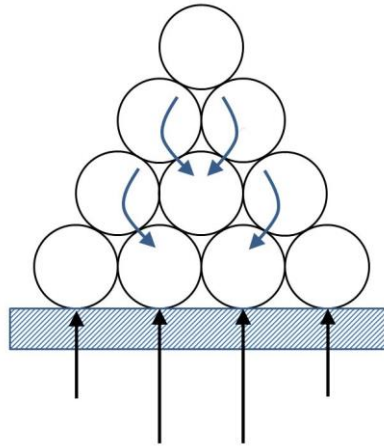


Bild 21: Umlenkung der Normalkräfte nach innen

Wenn die durchgeleiteten Normalkräfte in den Außenflanken nicht kontinuierlich zunehmen, dann besteht zumindest die Aussicht, dass sie stetig zunehmen bis sie gegen einen Grenzwert laufen. Das natürlich nur unter der Voraussetzung, dass es sich dabei um einen Gleichgewichtszustand handelt!

Insofern könnte man sich Gedanken darüber machen, mit welcher durchgeleiteten Normalkraft die beiden äußeren Zylinder (unten) beansprucht werden, wenn diese Normalkraft einen Grenzwert darstellen sollte. Eine Antwort darauf wäre aber nur möglich, wenn man den notwendigen Haftreibwert (größer als  $m_3$ ) an den Kontaktpunkten der Lastkolonne (z.B. die linke Flanke) zu den inneren Zylindern vorgibt, wobei davon ausgegangen wird, dass  $n$  theoretisch gegen einen unendlich hohen Wert strebt.

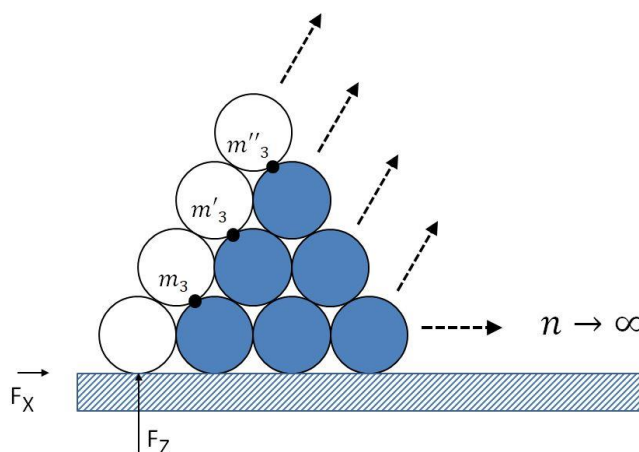


Bild 22: Betrachtung der linken Flanke bei einem unendlich hohen Turm

Die Kontaktpunkte mit den  $m_3$ -Werten befinden sich dabei auf einer Gleitebene unter  $30^\circ$ -Winkellage! Die Lastkolonne ordnet sich dagegen unter einem Winkel von  $60^\circ$  an. (siehe Bild 23)

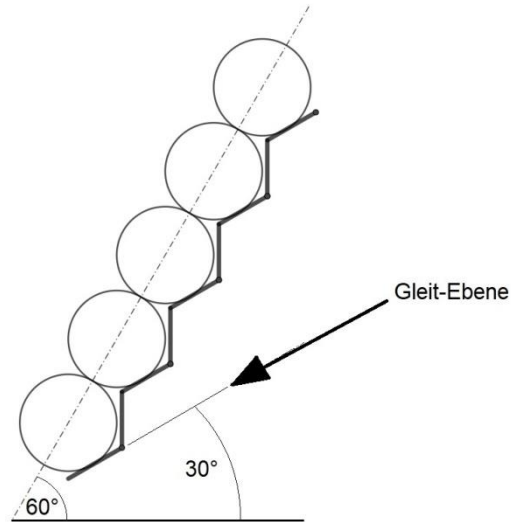


Bild 23: Gleitebene unter 30° bei der Lastkolonne (linke Flanke)

Hiermit kommt man der Vorstellung sehr nahe, dass die gesamte Kolonne als Einheit sich mit Hilfe der Haftreibung gegen das Abrutschen entlang der Gleitebene stemmt. Da die Gleitebene einen Winkel von 30° besitzt, müsste ein Haftreibwert von mindestens  $\tan(30^\circ) = 0.57735\dots$  ausreichen, damit kein Gleiten erfolgt. Diesen Ansatz berücksichtigen wir nun als  $m_3$ -Wert bei der Aufstellung des Gleichungssystems für die beiden unteren Zylinder. Im Grunde haben wir den denselben Fall wie in Bild 20, nur dass  $n$  gegen unendlich strebt und somit kein Unterschied zwischen dem Faktor  $(n-1)$  und  $(n-2)$  besteht. Die durchgeleitete Normalkraft ist oben wie unten  $F_N$ .

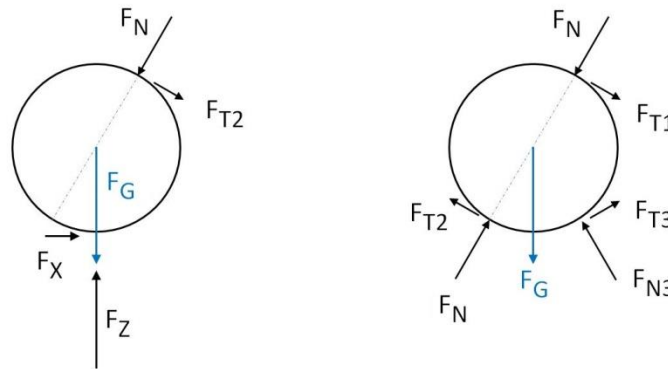


Bild 24: Kräfte an den beiden Zylindern (im Fall  $n$  gegen unendlich)

Aus dem linken freigeschnittenen Zylinder erhält man die bekannte Tangentialkraft:

$$F_{T2} = F_N \cdot (2 - \sqrt{3}) \quad (31)$$

Aus dem rechten freigeschnittenen Zylinder ergeben sich die Gleichungen:

$$0 = F_{T1} - F_{T2} + F_{T3} \cdot \cos(\theta) - F_{N3} \cdot \sin(\theta) + F_G \cdot \cos(\theta) \quad (32)$$

$$0 = F_N - F_N + F_{T3} \cdot \sin(\theta) + F_{N3} \cdot \cos(\theta) - F_G \cdot \sin(\theta) \quad (33)$$

sowie

$$F_{T1} = F_{T3} - F_{T2} = F_{T3} - F_N \cdot (2 - \sqrt{3}) \quad (34)$$

$$\text{vorausgesetzt wird:} \quad m_3 = \tan(60^\circ) = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{und} \quad F_{T3} = F_{N3} \cdot m_3 \quad (35)$$

aus (33) folgt:

$$F_{N3} = F_G \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{und} \quad F_{T3} = F_{N3} \cdot m_3 = \frac{F_G}{2} \quad (36)$$

Die Gleichungen (32) und (34) liefern dann schließlich:

$$F_{T1} = \frac{F_G}{4}, \quad F_{T2} = \frac{F_G}{4} \quad (37)$$

$$F_N = \frac{F_{T2}}{2 - \sqrt{3}} = \frac{F_G}{8 - 4\sqrt{3}} \approx F_G \cdot 0.9330 \dots \quad (38)$$

Der Rest folgt dann aus den bekannten Beziehungen:

$$F_Z = F_N + F_G = F_G \cdot \frac{6 + \sqrt{3}}{4} \approx F_G \cdot 1.9330 \dots \quad (39)$$

$$F_X = F_N \cdot (2 - \sqrt{3}) = \frac{F_G}{4} \quad (40)$$

$$\text{mit} \quad m_2 = \frac{F_X}{F_Z} = \frac{6 - \sqrt{3}}{33} \approx 0.12933 \dots \quad (41)$$

An dieser Stelle hätten wir nun die Kräfte, die am äußersten Zylinder (ganz unten) wirken würden. Nach dem ersten hypothetischen Ansatz, dass am untersten Zylinder alle Kräfte auf einen Grenzwert zulaufen, muss nun noch ein weiterer Schritt gemacht werden, um auch eine Aussage für ein endliches  $n$  treffen zu können. Hier bleibt nichts anderes übrig, als eine zweite Hypothese aufzustellen, wie sich die durchgeleiteten Normalkräfte der Lastkolonne Schritt für Schritt verändern könnten. Ich persönlich habe hier die Annahme getroffen, dass sich die Normalkraft gemäß einer geometrischen Reihe erhöht und gegen einen Grenzwert konvergiert. Dieser Grenzwert ist laut meiner Hypothese der Wert aus Gleichung (38). Letztendlich könnte diese Annahme aber auch durch jede beliebige Wachstumsfunktion vom Typ  $f(t) = S \cdot (1 + e^{a \cdot (b-t)})^{-c}$  ausgedrückt werden.

#### Die $\lambda^j$ -Hypothese der Normalkräfte von der äußeren Lastkolonne:

Es wird ein Zylinderturm für den allgemeinen Fall  $n$  betrachtet, wobei  $n$  sehr groß sein soll. Die unterste Lage an Zylindern wird als Schicht  $n$  bezeichnet, die darüber liegende als  $(n-1)$ -Schicht usw., bis wir am obersten Zylinder („Schlussstein“) der Schicht 1 angekommen sind.

Kräfte am Zylinder am Boden (Schicht  $n$ ):

$$F_N = \frac{F_G}{8 - 4\sqrt{3}} \approx F_G \cdot 0.9330 \dots, \quad F_T = F_N \cdot (2 - \sqrt{3}) \quad (42)$$

$$F_Z = F_N + F_G = F_G \cdot \frac{6 + \sqrt{3}}{4} \approx F_G \cdot 1.9330 \dots \quad (43)$$

$$F_X = F_N \cdot (2 - \sqrt{3}) = \frac{F_G}{4} \quad (44)$$



Für irgendein darüber befindlichen Zylinder der äußeren Lastkolonne in der Schicht k sollen die folgenden freigeschnittenen Kräfte gelten:

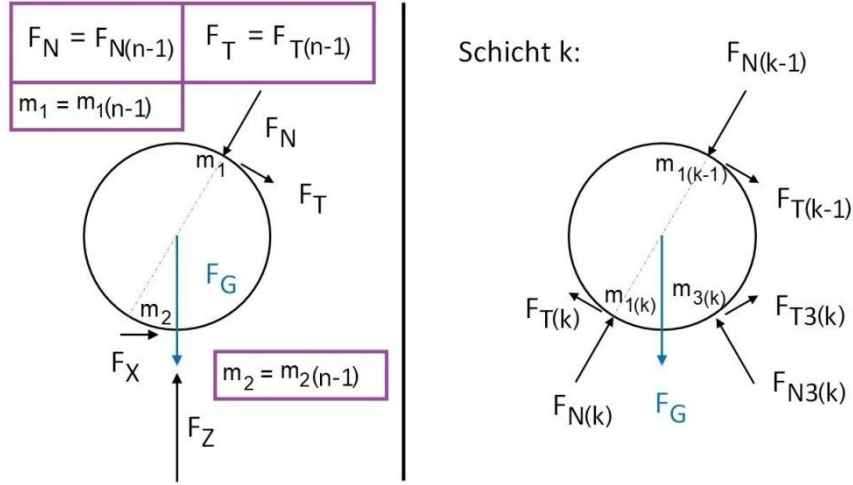


Bild 25: Kräfte bei der  $\lambda^j$ -Hypothese

Die Hypothese sei: wenn  $(n-1) \rightarrow \infty$

$$F_N = F_G \cdot \sum_{j=1}^{(n-1) \rightarrow \infty} \lambda^j = \frac{F_G}{8 - 4 \cdot \sqrt{3}} = F_G \cdot \frac{2 + \sqrt{3}}{4} \approx F_G \cdot 0.9330 \dots \quad (45)$$

$$\rightarrow \lambda = \frac{1}{9 - 4 \cdot \sqrt{3}} \approx 0.4826728 \dots \quad (46)$$

$$F_Z = F_G \cdot \left( 1 + \sum_{j=1}^{(n-1) \rightarrow \infty} \lambda^j \right) = \frac{F_G}{8 - 4 \cdot \sqrt{3}} = F_N + F_G = F_G \cdot \frac{6 + \sqrt{3}}{4} \approx F_G \cdot 1.9330 \dots \quad (47)$$

$$F_X = F_N \cdot (2 - \sqrt{3}) = \frac{F_G}{4} \quad \rightarrow \quad m_2 = \frac{F_X}{F_Z} = \frac{1}{6 + \sqrt{3}} \approx 0.12933 \dots \quad (\text{Maximalwert}) \quad (48)$$

womit für irgendeine der oberen Schichten k gilt:

$$F_{Nk} = F_G \cdot \sum_{j=1}^k \lambda^j \quad (49)$$

$$F_{Nk} - F_{Nk-1} = F_G \cdot \lambda^k \quad (50)$$

Für die weitere Berechnung kennen wir als Startwert nur  $m_1 = m_{1\,n-1} = 2 - \sqrt{3}$ , welcher für die Schicht  $k = n - 1$  anzuwenden ist. Wenn die Kräfte für die Schicht  $k = n - 1$  gelöst worden sind, dann können die Kräfte der folgenden Schichten (nach oben verlaufend) rekursiv berechnet werden.

Nimmt man die Vorgaben aus der Hypothese und stellt sodann die Gleichgewichtsbedingungen auf, dann ergeben sich folgende Startgleichungen:

$$0 = F_{T(k)} - F_{T(k-1)} + F_{T3(k)} \cdot \cos(\theta) - F_{N3(k)} \cdot \sin(\theta) + F_G \cdot \cos(\theta) \quad (51.1)$$

$$0 = F_{N(k)} - F_{N(k-1)} + F_{T3(k)} \cdot \sin(\theta) + F_{N3(k)} \cdot \cos(\theta) - F_G \cdot \sin(\theta) \quad (51.2)$$

$$0 = F_{T(k)} + F_{T(k-1)} - F_{T3(k)} \quad (51.3)$$

$$F_{N(k)} = F_G \cdot \sum_{j=1}^k \lambda^j = F_G \cdot \frac{\lambda \cdot (1 - \lambda^k)}{1 - \lambda} \quad (51.4)$$

$$F_{N(k-1)} = F_G \cdot \sum_{j=1}^{k-1} \lambda^j = F_{N(k)} - F_G \cdot \lambda^k \quad (51.5)$$

$$F_{T(k)} = F_{N(k)} \cdot m_{1(k)} \quad (51.6)$$

$$F_{T(k-1)} = F_{N(k-1)} \cdot m_{1(k-1)} \quad (51.7)$$

$$F_{T3(k)} = F_{N3(k)} \cdot m_{3(k)} \quad (51.8)$$

$$\theta = \frac{\pi}{3} \quad (51.9)$$

$$\lambda = \frac{1}{9-4\sqrt{3}} \approx 0.4826728 \dots \quad (51.10)$$

$$m_{1(n-1)} = 2 - \sqrt{3} \quad (51.11)$$

$$F_G = 1 \quad (\text{Normierung}) \quad (51.12)$$

Aus diesen Gleichungen erhält man schließlich die Rekursionsformeln zur Berechnung der Werte  $m_{1(k-1)}$  und  $m_{3(k-1)}$ .

$$m_{1(k-1)} = \frac{1 - m_{1(k)} \cdot \frac{\lambda \cdot (1 - \lambda^k)}{1 - \lambda} - \sqrt{3} \cdot \lambda^k}{3 \cdot \frac{\lambda \cdot (1 - \lambda^{k-1})}{1 - \lambda}} \quad (52)$$

$$m_{3(k-1)} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot m_{3(k)} \cdot \frac{\lambda \cdot (1 - \lambda^k)}{1 - \lambda} - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \lambda^k}{\frac{2\sqrt{3}}{3} - \lambda^k - \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot m_{3(k)} \cdot \frac{\lambda \cdot (1 - \lambda^k)}{1 - \lambda}} \quad (53)$$

Für den untersten Zylinder mit  $k = (n - 1)$  gilt dann bekanntlich:

$$m_{2(n-1)} = \frac{F_{N(n-1)}}{F_{N(n-1)} + F_G} \cdot m_{1(n-1)} \quad (54)$$

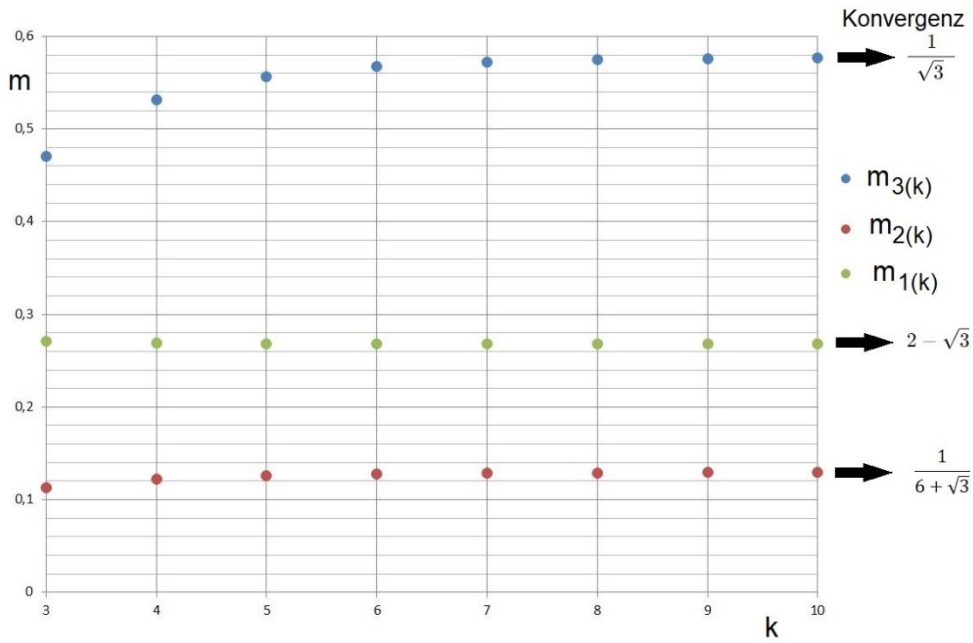


Bild 26: Diagramm der m-Werte für  $k = 3 \dots 10$

Im Diagramm nehmen die Werte mit steigendem  $k$  (Nummer der Schicht) zu und konvergieren gegen einen Grenzwert. Eine Kräfteverteilung gemäß der  $\lambda^j$ -Hypothese zeigt damit eine Lösung, bei welcher der notwendige Haftreibungswert maximal bei  $\tan(30^\circ)$  liegt, also bei einem Reibkegel, bei dem ein Abrutschen der Außenkolonne (sinnbildlich) entlang der kontaktierenden Gleitebene eintreten würde. (siehe Bild 23)

Ebenso lassen sich die Gleichungen für die Normalkraft  $F_{N3(k)}$  und deren zugeordnete Tangentialkraft  $F_{T3(k)}$  angeben.

$$F_{N3(k)} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \left(1 - m_{1(k)} \cdot \frac{\lambda}{1-\lambda}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \left(1 - m_{1(k)} \cdot \frac{2+\sqrt{3}}{4}\right) \quad (55)$$

$$F_{T3(k)} = F_{N3(k)} \cdot m_{3(k)} \quad (56)$$

Die Kräfte in der Schicht k haben ebenfalls die Eigenschaft, dass sie gegen einen Grenzwert konvergieren (Maximum) je größer k wird. Man erkennt anhand der Tabellenwerte, dass die Kräftesumme aus  $F_{N3(k)}$  und  $F_{T3(k)}$  schon ab  $k=10$  nahezu  $1 \cdot F_G$  ergibt.

$$\sqrt{[F_{N3(k)}]^2 + [F_{T3(k)}]^2} = 1 \cdot F_G \quad (57)$$

Das bedeutet, die Gewichtskraft jedes Zylinders der Außenkolonne fließt hauptsächlich in diese Kraftkomponenten ein. Für  $k > 10$  kann man quasi sagen, dass die Gewichtskraft dort komplett „verbraucht“ wird, was der sogenannten „Kraftumlenkung nach innen“ entspricht. (siehe Bild 21)

k	m 1(k)	m 2(k)	m 3(k)	F N(k)	F T(k)	F N3(k)	F T3(k)
25	0,267949	0,129332	0,577350	0,933013	0,250000	0,866025	0,500000
24	0,267949	0,129332	0,577350	0,933013	0,250000	0,866025	0,500000
23	0,267949	0,129332	0,577350	0,933013	0,250000	0,866025	0,500000
22	0,267949	0,129332	0,577350	0,933012	0,250000	0,866025	0,500000
21	0,267949	0,129332	0,577350	0,933012	0,250000	0,866025	0,500000
20	0,267949	0,129332	0,577350	0,933012	0,250000	0,866025	0,500000
19	0,267949	0,129332	0,577350	0,933011	0,250000	0,866025	0,499999
18	0,267949	0,129332	0,577349	0,933009	0,249999	0,866025	0,499999
17	0,267949	0,129331	0,577347	0,933005	0,249998	0,866025	0,499997
16	0,267949	0,129331	0,577344	0,932996	0,249996	0,866025	0,499994
15	0,267950	0,129329	0,577337	0,932978	0,249991	0,866025	0,499988
14	0,267950	0,129327	0,577322	0,932941	0,249981	0,866025	0,499975
13	0,267951	0,129322	0,577291	0,932864	0,249962	0,866024	0,499948
12	0,267953	0,129311	0,577228	0,932704	0,249920	0,866022	0,499892
11	0,267957	0,129289	0,577096	0,932372	0,249835	0,866018	0,499776
10	0,267964	0,129244	0,576824	0,931686	0,249659	0,866009	0,499535
9	0,267981	0,129150	0,576259	0,930264	0,249293	0,865991	0,499035
8	0,268015	0,128954	0,575083	0,927318	0,248535	0,865955	0,497996
7	0,268086	0,128546	0,572627	0,921215	0,246965	0,865878	0,495825
6	0,268236	0,127693	0,567452	0,908570	0,243711	0,865716	0,491252
5	0,268561	0,125890	0,556339	0,882372	0,236971	0,865366	0,481437
4	0,269300	0,121988	0,531487	0,828096	0,223006	0,864570	0,459507
3	0,271189	0,113121	0,470464	0,715646	0,194075	0,862536	0,405792

Bild 27: Tabelle mit den m-Werten und die normierten Kräfte für  $k = 3 \dots 25$

Was bringt uns nun diese Hypothese? Wenn sie als Gleichgewichtszustand niemals zutrifft, dann hat sie auch keinerlei Aussagekraft. Sie hätte eigentlich nur eine Berechtigung, wenn man von der Vermutung ausgeht, dass der innere Zylinderturm, man denke sich also die Außenkolonne rechts und links weg, ebenfalls einen Gleichgewichtszustand besitzt, bei dem die notwendigen Haftreibungswerte maximal bei  $\tan(30^\circ)$  liegen. Durch die „Kraftumlenkung nach innen“ infolge der beiden Außenkolonnen rechts und links, hat man zumindest Gewissheit, dass der innere Kern durch Außenkräfte zusammengehalten werden könnte. Ein Beweis, dass es sich wirklich so verhält, ist das aber noch lange nicht!!!

Man kann diese Hypothese lediglich als ein „zartes Indiz“ werten, dass die nötigen Haftreibungswerte zwischen den Zylindern maximal bei etwa  $\tan(30^\circ)$  liegen könnten.

Sollte also an dieser Hypothese ein Körnchen Wahrheit dran sein, denn der funktionsabhängige Verlauf der Normalkräfte ist ja hier von mir ganz beliebig gewählt worden, dann könnte man versucht sein folgende Spekulation abzugeben:

ist n sehr groß:  $\mu_{1min} \geq 0.57735 \dots$  (58)

Als kleine Absicherung der  $\lambda^j$ -Hypothese könnte an dieser Stelle noch eine Überlegung folgen, wie die Kraftverteilung im „inneren Zylinderturm“ verlaufen könnte, wenn  $n$  gegen unendlich läuft. Mit dem Ziel, dass  $\mu_{1min} \geq 0.57735 \dots$  überall im Zylinderturm gilt, hat man die Möglichkeit eine weitere Hypothese über die Kraftverteilung aufzustellen, die nicht dagegen verstoßen sollte. Und hier verfolge ich dasselbe Prinzip wie bei der „Normalkraft-Verteilung ohne Reibeinfluss“, nur dass jetzt der Reibeinfluss generell auf diesen maximalen Wert  $\mu_{1min}$  ausgerichtet wird und zugleich die Gleichgewichtsbedingungen gelten sollen.

Wenn man diesen Wert  $m = \tan(30^\circ)$  überall an den Kontaktstellen der inneren Zylinder ansetzt, ausgenommen sind die Kontaktpunkte zum Untergrund, dann darf man an all diesen Kontaktstellen die dort wirkende Kraft als eine Vertikalkraft einzeichnen! In diesem Fall lässt sich dann eine „Vertikalkraft-Verteilung“ mit Reibeinfluss ableiten, an deren Kontaktstellen man die normierten Vertikalkräfte numerisch benennen kann. Für diese Betrachtung eliminiere ich gedanklich die Gewichtskraftanteile der 3 Zylinder an den Spitzen des gleichseitigen Dreiecks und verfolge das (intuitive) Ziel, dass (genauso wie bei der Normalkraft-Verteilung) unten am Boden stets dieselbe Auflagerkraft auftauchen soll. Die Belastung ist über die Breite gesehen gleichmäßig.

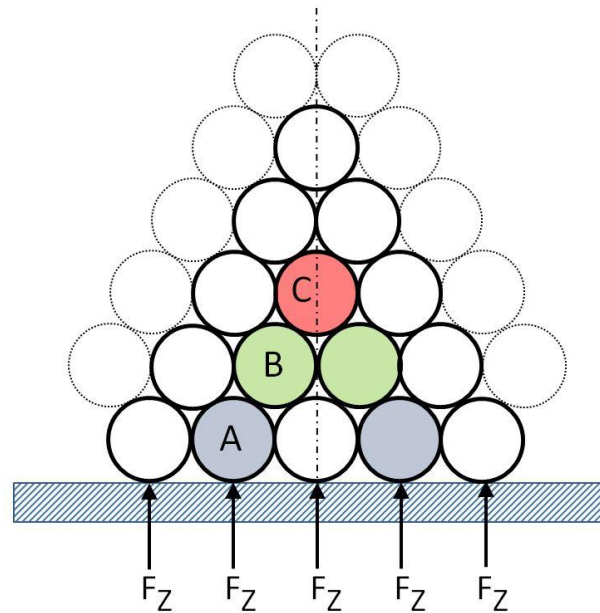


Bild 28: Vertikalkraft-Verteilung mit dem Ziel der gleichmäßigen Auflagerreaktion

Die vertikale Kraft  $F_Z$  lässt sich einfach über die Summe aller beteiligten Zylinder berechnen:

$$F_Z = \left( \frac{n \cdot (n+1)}{2} - 3 \right) \cdot \frac{1}{(n-2)} \cdot F_G = \frac{n+3}{2} \cdot F_G \quad (59)$$

Um die Gleichgewichtsbedingungen zu prüfen, sollen die drei farblich gekennzeichneten Zylinder A, B und C dienen. Zylinder A stellt ein Element am Untergrund dar, während Zylinder B irgendwo im Inneren seine Position einnimmt links von der Symmetrielinie. Der Zylinder C stellt dann noch den Spezialfall von B dar, wenn dieser auf der Symmetrielinie liegt.

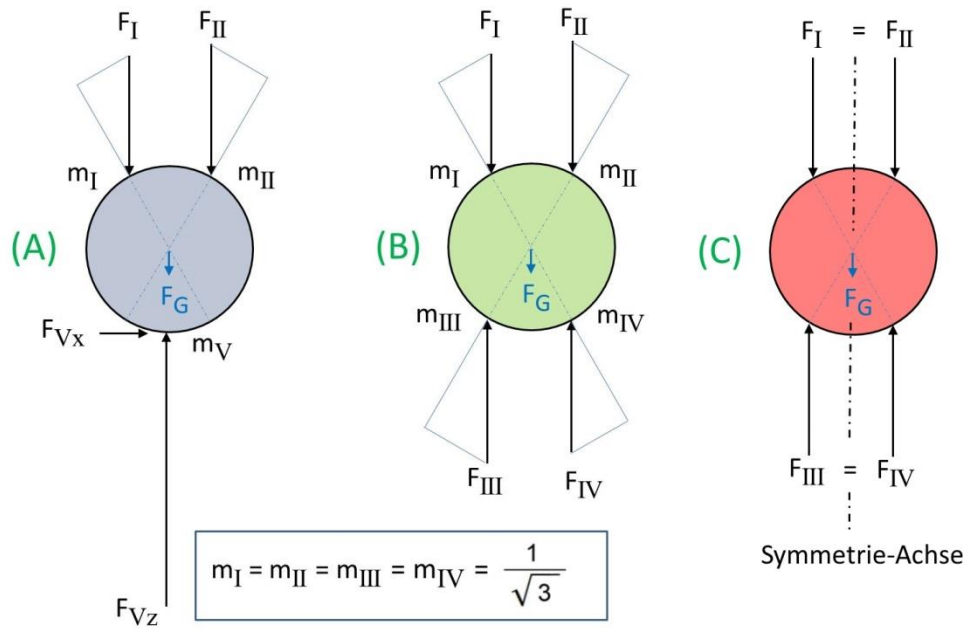


Bild 29: Schema der Vertikalkräfte bei den Zylindern A, B und C

Beim Zylinder A sei:

$$F_I = p \cdot F_G \quad (60)$$

$$F_{II} = (p + q) \cdot F_G \quad \text{mit } p \geq 0, \quad q \geq 0 \quad (61)$$

Gleichgewichtsbedingungen beim Zylinder A:

$$F_{Vz} = (2p + q + 1) \cdot F_G \quad (62)$$

$$F_{Vx} = q \cdot F_G \cdot \cos(\theta) = q \cdot F_G \cdot \frac{1}{2} \quad (63)$$

$$\rightarrow m_V = \frac{F_{Vx}}{F_{Vz}} = \frac{q}{2 \cdot (2p + q + 1)} < \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (64)$$

D.h., wenn die oben eingeleiteten Vertikalkräfte verwendet werden, dann erfüllt der Wert  $m_V$  stets die Forderung:  $m_V < \tan(30^\circ)$ . Die Annahme der Kräfte ist zulässig

Beim Zylinder B sei:

$$F_I = p \cdot F_G$$

$$F_{II} = (p + q) \cdot F_G \quad \text{mit } p \geq 0, \quad q \geq 0$$

$$F_{III} = \left(p + q + \frac{1}{2}\right) \cdot F_G \quad (65)$$

$$F_{IV} = \left(p + \frac{1}{2}\right) \cdot F_G \quad (66)$$

Gleichgewichtsbedingungen beim Zylinder B:

$$0 = F_I + F_{II} + F_G - F_{III} - F_{IV} \quad (67)$$

$$F_{II} - F_I = F_{III} - F_{IV} = q \cdot F_G \quad (68)$$

Diese Bedingungen werden eingehalten, wenn alle Kontaktstellen denselben m-Wert besitzen.

$$m_I = m_{II} = m_{III} = m_{IV} = \tan(30^\circ) = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (69)$$

Beim Zylinder C muss man dagegen gar nicht erst rechnen. Da alle Kräfte symmetrisch zur senkrechten Achse vorliegen, gleichen sich diese natürlich aus. Es gilt dasselbe wie beim Zylinder B bzgl. der m-Werte gemäß Gleichung (69) sowie Gleichung (67):

$$F_G = (F_{III} + F_{IV}) - (F_I + F_{II})$$

Die Frage ist nun, wie die beiden Parameter p und q gestaltet sind, damit sie im Einklang mit den Kraftvorgaben sind? Zu diesem Zwecke habe ich ersetzend zwei Hilfsparameter r und s eingeführt, über die sich p und q errechnen würden. Die Hilfsparameter sind dabei „Dreieckskoordinaten“ vom gleichseitigen Dreieck des Zylinderturms.

Die Parameter p(r) und q(r,s):

$$p(r) = \frac{r}{2} \quad (70)$$

$$q(r, s) = \frac{s+1}{2} - r \quad (71)$$

Daraus folgen nun die Vertikalkräfte und Auflagerkräfte:

$$F_I = p \cdot F_G = \frac{r}{2} \cdot F_G \quad (72)$$

$$F_{II} = (p + q) \cdot F_G = \frac{s+1-r}{2} \cdot F_G \quad (73)$$

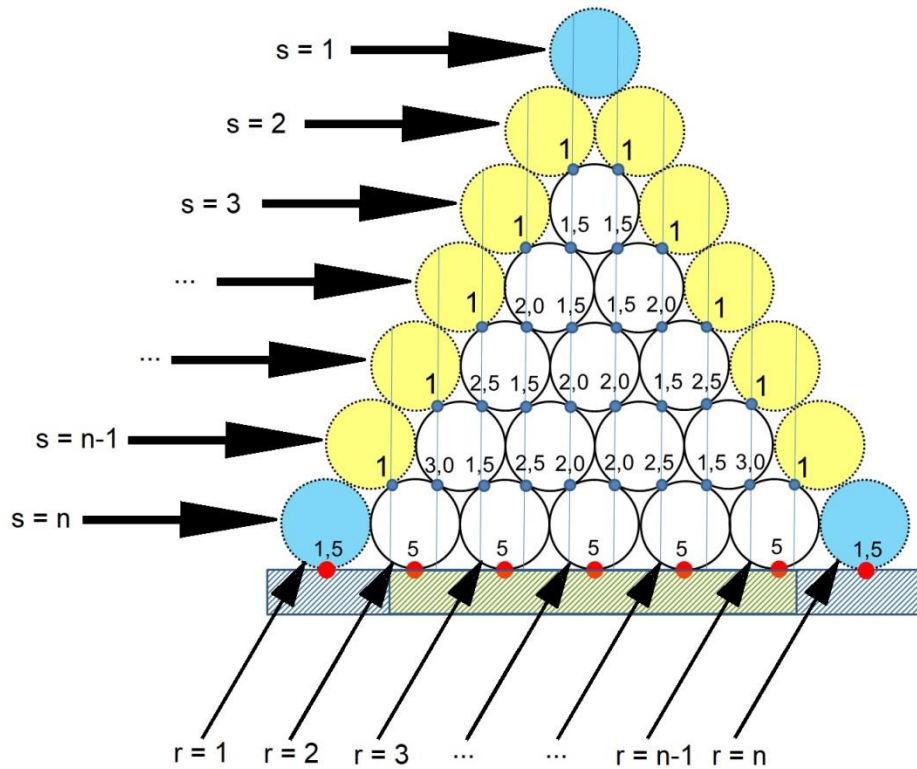
$$F_{III} = \left(p + q + \frac{1}{2}\right) \cdot F_G = \frac{s+2-r}{2} \cdot F_G \quad (74)$$

$$F_{IV} = \left(p + \frac{1}{2}\right) \cdot F_G = \frac{r+1}{2} \cdot F_G \quad (75)$$

$$F_{Vz} = (2p + q + 1) \cdot F_G = \frac{s+3}{2} \cdot F_G \quad (76)$$

$$F_{Vx} = q \cdot F_G \cdot \cos(\theta) = \left(\frac{s+1}{2} - r\right) \cdot F_G \cdot \frac{1}{2} \quad (77)$$

$$\rightarrow m_V = \frac{F_{Vx}}{F_{Vz}} = \frac{n+1-2r}{2 \cdot (n+3)} < \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (78)$$

Bild 30: Vertikalkräfte in den Kontaktpunkten am Beispiel  $n=7$ 

Für das Verständnis sei hier ein Zylinderturm  $n=7$  dargestellt mit den dazugehörigen Vertikalkräften, obwohl wir ja eigentlich den Fall  $n$  gegen unendlich zu betrachten haben. Aber mittels dieser Darstellung kann man besser das Prinzip erkennen, welches zu der Gleichverteilung bei den senkrechten Auflagerreaktionen am Boden führen (siehe rote Kontaktpunkte im Innenbereich).

Für die Vertikalkräfte (an den blauen Kontaktpunkten) gemäß den Gleichungen (70) bis (75) gelten dabei nur bestimmte Intervalle von  $r$  und  $s$ , weil allein die weißen Zylinder im Innenbereich zu betrachten sind.

$$\text{Intervall:} \quad 2 \leq r \leq n-1 \quad 3 \leq s \leq n-1 \quad (79)$$

Im Zusammenhang mit einem unendlich großen Zylinderturm lassen sich die  $\lambda^j$ -Hypothese und die Vertikalkraft-Verteilungshypothese gut ergänzen. Man kann also davon ausgehen, dass die Gleichgewichtsbedingungen zwischen den gelben und weißen Zylindern weitestgehend erfüllt sein sollten (siehe Bild 30).

Eine Ungereimtheit ist jedoch sofort zu erkennen! Bei der  $\lambda^j$ -Hypothese hatten die Außenzylinder eine Auflagerreaktion  $F_Z = F_G \cdot 1.9330 \dots$ . Jedoch in Bild 30 würden bei den äußeren Zylindern die Auflagerreaktionen bei  $F_Z = F_G \cdot 1.5$  liegen, damit die Summe wieder stimmt. Das liegt auch daran, weil erst ab einer Schicht  $k=10$  (laut Tabelle Bild 27) die Kräftesumme aus  $F_{N3(k)}$  und  $F_{T3(k)}$  annähernd bei  $1 \cdot F_G$  liegt. In den höheren Schichten würde sich die Vertikalkraft-Verteilung etwas anders verhalten als die Theorie, die in Bild 30 dargestellt ist. In diesem Fall würden sich die



marginalen Abweichungen bzw. kleinen Ungereimtheiten in der Gesamtstruktur „verrieseln“, denn die bisherigen Überlegungen zu den Hypothesen beziehen sich auf ein  $n$ , das gegen unendlich läuft. Das bedeutet, wenn man sich den oberen Teil des Turmes bis beispielsweise  $k=10$  wegdenkt, dann sollten die angeführten Hypothesen zu einem „konstruierten Gleichgewicht“ finden können, bei dem der Haftreibungswert zwischen den Zylindern mindestens  $\tan(30^\circ)$  sein sollte. Die Ungewissheit bleibt demnach nur noch bei den oberen 10 Schichten, ob diese womöglich einen höheren Haftreibungswert benötigen bzw. einfordern(?). Diese Erkenntnis können wir aus den aufgestellten Hypothesen von mir leider nicht ableiten - dieser Makel bleibt.

Abschließend kann man nun auch eine Bewertung der Haftreibungswerte am Bodenkontakt vornehmen, da sich über Gleichung (78) ein Maximalwert berechnen lässt.

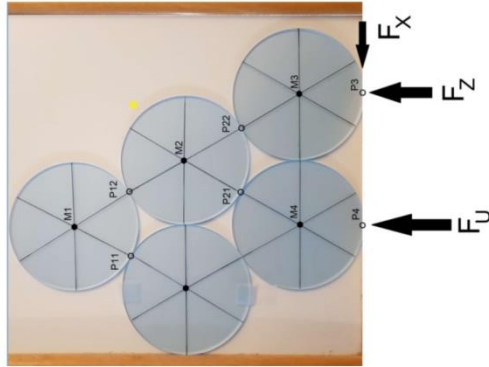
$$m_V = \frac{F_{Vx}}{F_{Vz}} = \frac{n+1-2r}{2 \cdot (n+3)} < \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1-2r}{2 \cdot (n+3)} = \frac{1}{2} \leq \mu_{2min} \quad (80)$$

$$\text{ist } n \text{ sehr groß:} \quad \mu_{1min} \geq 0.57735 \dots \quad \text{und} \quad \mu_{2min} \geq 0.5 \quad (81)$$

Der Wert für  $\mu_{2min}$  ist jedoch nur im Kontext mit der Vertikalkraft-Verteilungshypothese zu sehen! Es besteht theoretisch weiterhin die Möglichkeit, dass eventuell andere Gleichgewichtssituationen kleinere Haftreibungswerte erfordern. - Man muss sie nur finden.

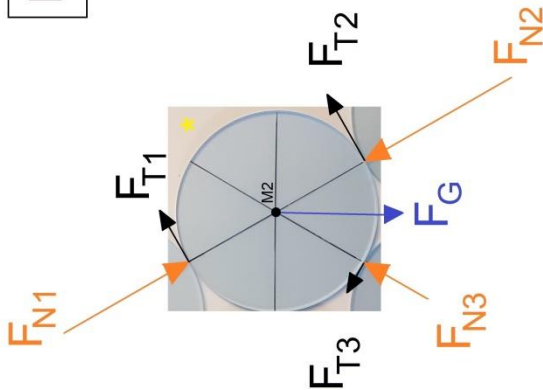
ANLAGE:



## Hypothese für die Schicht (n-1): n sehr groß

Wenn n sehr groß ist, dann ist die Annahme, dass die beiden Normalkräfte  $F_{N1}$  und  $F_{N2}$  sich kaum noch unterscheiden und somit gleichgesetzt werden können.

Am Kontaktpunkt von  $F_{N3}$  konvergiert die notwendige Haftreibung gegen den Wert  $\tan(30^\circ) = 0.57735 \dots$



Gleichungssystem:

$$[1]: F_{N2} - F_{N1} - F_G \sin(\theta) + F_{N3} \cos(\theta) + F_{T3} \sin(\theta) = 0$$

$$[2]: F_{T2} + F_{T1} - F_{T3} \cos(\theta) + F_{N3} \sin(\theta) - F_G \cos(\theta) = 0$$

$$[3]: F_{T1} + F_{T3} = F_{N2} \mu_1$$

$$[4]: F_{T2} = F_{N2} \mu_1$$

$$[5]: \mu_1 = 2 - \sqrt{3}$$

$$[6]: F_{T3} = F_{N3} \mu_3$$

$$[7]: F_{N1} = F_{N2}$$

$$[8]: \mu_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$[9]: \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$[10]: F_G = 1 \quad (\text{Normierungsgröße})$$

Ergebnisse:

$$F_{N1} = 0.93301270$$

$$F_{N2} = 0.93301270$$

$$F_{N3} = 0.86602540$$

$$F_{T1} = -0.25$$

$$F_{T2} = 0.25$$

$$F_{T3} = 0.5$$

$$\left| \frac{F_{T1}}{F_{N1}} \right| = 0.26794919 = \mu_1 = 2 - \sqrt{3}$$

in Schicht n



$$F_{N1} = F_{N2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$$

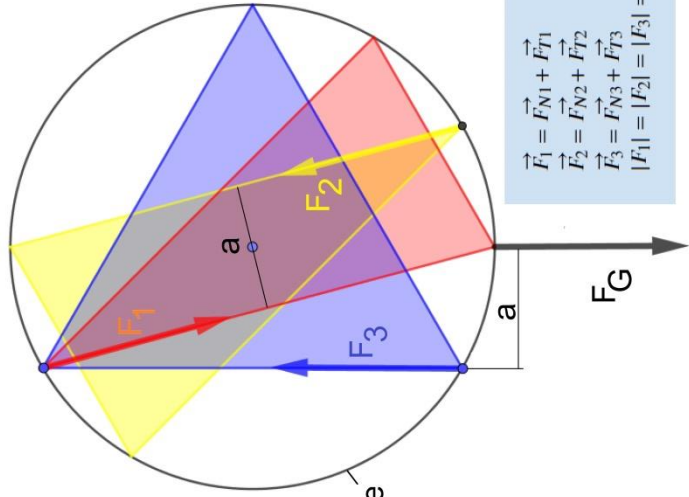
$$F_{N3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

resultierende Kräfte  
in den Reibkegeln

$$F_Z = F_G + F_{N2} = \frac{6 + \sqrt{3}}{4} = 1.9330127$$

$$F_X = F_{N2} \cdot (\cos(\theta) - \mu_1 \cdot \sin(\theta)) = \frac{1}{4}$$

$$\mu_{2min} = \frac{F_X}{F_Z} = \frac{1}{6 + \sqrt{3}} = 0.12933$$



$$\begin{aligned} \vec{F}_1 &= \vec{F}_{N1} + \vec{F}_{T1} \\ \vec{F}_2 &= \vec{F}_{N2} + \vec{F}_{T2} \\ \vec{F}_3 &= \vec{F}_{N3} + \vec{F}_{T3} \\ |\vec{F}_1| &= |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3| = |F_G| \end{aligned}$$