

# Die Lichtablenkung an der Sonnenoberfläche

Eine Übertragung des Gravitationsgesetzes  
auf das Licht durch ein Modell mit einer  
„Bahnkrümmungs-Charakteristik“

von  
Kai-Uwe Ekrutt

Mai 2015

Erste Fassung 001.07052015

# Inhaltsverzeichnis

	<u>Seite</u>
<b>Vorwort</b>	<b>3</b>
<b>1. Gesetze der Newtonschen Mechanik</b>	<b>4</b>
1.1 Das Gravitationsgesetz:	4
1.2 Das Dynamische Grundgesetz:	5
1.3 Das Gesetz zur Erhaltung des Drehimpulses:	7
<b>2. Übertragung der Gesetze auf die Lichtausbreitung (modellhaft)</b>	<b>9</b>
2.1 Die Bahnkrümmung des Lichtes in der Nähe großer Massen:	9
2.2 Der Grenzfall des Schwarzschild-Radius als Kriterium für ein „Schwarzes Loch“:	11
<b>3. Berechnung der Lichtablenkung an der Sonnenoberfläche</b>	<b>13</b>
3.1 Die Herleitung der differentiell kleinen Winkeländerung $d\varphi$ :	13
3.2 Berechnung der Winkeländerung $\varphi$ an der Sonnenoberfläche:	17
3.3 Weitere Umformungen am Integral zur Berechnung von $\varphi$ :	17
<b>4. Nachwort</b>	<b>19</b>
<b>Quellenverweise und weiterführende Fachliteratur</b>	<b>24</b>

## Vorwort

Vor etwa 100 Jahren, genauer gesagt am 25. November 1915, stellte Albert Einstein der Preußischen Akademie der Wissenschaften seine Arbeiten über die Lichtablenkung an der Sonne vor, die man ausgezeichnet in den kurzzeitigen Momenten einer totalen Sonnenfinsternis beobachten und somit bestätigen würde können. Seit der Veröffentlichung der „Speziellen Relativitätstheorie“ im Jahre 1905, waren diese neuen Vortragselemente die ersehnte Ernte einer zehnjährigen Weiterentwicklung der Einsteinschen Theorie über die gekrümmte Raumzeit gewesen, welche in den kommenden Jahren nach 1915 die Grundlagen zur „Allgemeinen Relativitätstheorie“ lieferten.

Als Gegenstand dieser Arbeit wurden zwei Phänomene der Astronomie näher beleuchtet, nämlich die sogenannte Perihelbewegung des Planeten Merkur und die theoretische Lichtablenkung an einem sehr massereichen Objekt wie z.B. der Sonne. Zur Perihelbewegung vom Merkur sei hier nur so viel erwähnt, dass man mit dem theoretischen Gebäude der neuen „Allgemeinen Relativitätstheorie“ die noch nicht erklärbar minimalen Abweichungen der Planetenbewegung zu deuten versuchte, die mittels der Newtonschen Bewegungsgesetze nicht mehr ausgleichend beschrieben werden konnten.

In ähnlicher Weise würde dieses auch auf die Winkelablenkung des Lichtes an der Sonnenoberfläche zutreffen, deren Ursache auch über die Newtonsche Mechanik erklärt werden kann. Jedoch der Unterschied zur Theorie Newtons war, dass die Lichtablenkung mit Berücksichtigung der massebedingten Raumzeitkrümmung einen doppelt so großen Wert ergeben müsste, nämlich den Wert von 1,75 Bogensekunden. Die Richtigkeit dieser Prognose wurde dann auch vier Jahre später bei der Sonnenfinsternis vom 29. Mai 1919 unter der Leitung von Arthur Stanley Eddington experimentell bestätigt. - Und dieser Lichtablenkung möchte ich mich hiermit denn nun widmen.

Das folgende Skript soll eine Möglichkeit aufzeigen, sich mit der Berechnung der Lichtablenkung in kleinen Schritten anzufreunden, die NUR im übertragenden Sinne den „Charakter“ einer Raumkrümmung als modellhafte Vorstellung zu veranschaulichen sucht. Es sei hier schon zu Anfang darauf hingewiesen, dass die folgenden Berechnungen keinesfalls etwas mit dem exakten Theoriegebäude und den Herleitungen aus der „Allgemeinen Relativitätstheorie“ zu tun haben. Sie sollen als ein probates Mittel und als Visualisierung dienen, ohne auf die recht komplexe Thematik der Raumzeitkrümmung zurückgreifen zu müssen, die sich als Spezialgebiet aus der Differentialgeometrie herauskristallisiert hat.

Die Möglichkeit, auf die noch anschaulichen Gesetze der Mechanik zurückgreifen zu können (Gravitationsgesetz und das dynamische Grundgesetz von Newton), soll der Ansporn sein, das Berechnungskalkül der Lichtablenkung einer eher breiten Leserschaft noch schmackhaft zu machen. Der Griff in die „Trickkiste“ soll daher nicht das Ziel verfolgen, mit den kommenden modellhaften Anschauungen und Gleichungen ein falsches Bild der Physik zu vermitteln! Wer sich der reinen Physik verpflichtet fühlt, wird ohnehin den korrekten Weg des sauberen Studiums gehen müssen und diese Art der vereinfachten Darstellung eher nur belächeln können. Aber nicht jeder hat die Möglichkeit und die notwendige Zeit, sich in intensivster Weise der relativistischen Mechanik widmen zu können. Und jenen Interessierten sei nun dieser verallgemeinert „konstruierte“ Berechnungspfad eine an die Hand gegebene Hilfestellung, sich mit dieser Thematik auseinanderzusetzen und auch ein Verständnis für das Phänomen der Lichtablenkung zu entwickeln. Im Vordergrund stehe daher allein der Spaß, mit noch überschaubar mathematischen Hilfsmitteln die Bewegung des Lichtes mit aller Freude verfolgen zu dürfen.

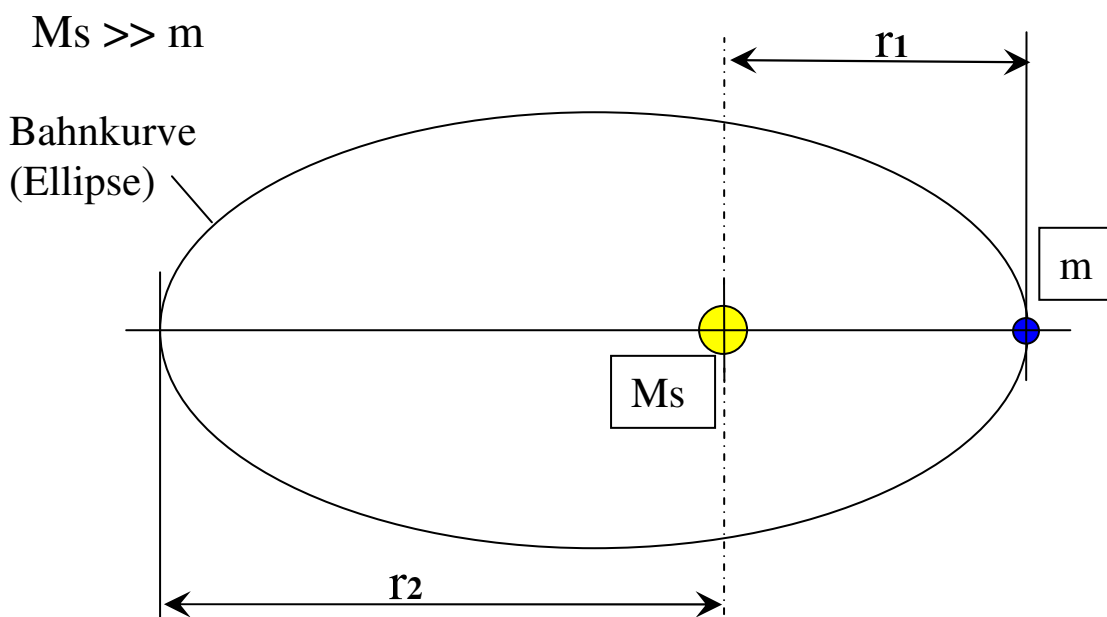
# 1. Gesetze der Newtonschen Mechanik

## 1.1 Das Gravitationsgesetz:

Mit dem Gravitationsgesetz von Newton lässt sich im Rahmen der Himmelsmechanik die Anziehungskraft zweier punktförmiger Massen errechnen. Als Beispiel könnte das ein Planet sein, der sich um die Sonne bewegt, oder aber auch der Mond, der sich um die Erde bewegt. Da sich die beiden Massen gegenseitig anziehen, üben sie auch im Verhältnis ihrer Massen bzw. ihrer Trägheiten ein Einfluss auf den Partner aus. D.h., die Sonne besitzt aufgrund ihrer großen Masse gegenüber einem Planeten (wie z.B. der Erde) so viel Massenträgheit, dass die gegenseitigen Anziehungskräfte im Hauptsächlichen nur Einfluss auf die Planetenbahn nehmen. Die Sonne selbst bleibt daher quasi das Zentrum des um sie rotierenden Planeten, so wie es das erste Keplersche Gesetz formuliert. Denn der Planet bewegt sich auf einer Ellipsenbahn, in deren einem Brennpunkte sich die Sonne befindet.

Die Essenz aus dem ersten Keplerschen Gesetz soll uns hier im ausreichenden Maße genügen, um die Bewegung einer unbedeutenden Masse um ein mächtiges Massezentrum (Sonne) zu veranschaulichen, sofern sich diese Masse auf einer geschlossenen Bahn befindet. Bei Bahnparametern, die dazu führen, dass sich die Masse ohne Wiederkehr aus dem Einzugsbereich des Massezentrums herausbewegt, liegt keine Ellipsenbahn mehr vor. Ein Kleinkörper (z.B. ein Komet) entflieht zuweilen dem Massezentrum, sobald die Bahn parabolisch Form annimmt oder gar eine hyperbolische Form hat, was in solchen Fällen die Regel wäre.

Im Folgenden betrachten wir die Situation einer Masse  $m$  (Kleinkörper), der sich auf einer Ellipsenbahn befindet und um  $M_s$  (Massezentrum) rotiert. Die Aussage des Gravitationsgesetzes beziehen wir speziell auf die Bahnpunkte des kleinsten und größten Abstandes, dem so genannten Perihel und Aphel.



$$F_1 = G \cdot M_s \cdot m \cdot \frac{1}{r_1^2}$$

$$F_2 = G \cdot M_s \cdot m \cdot \frac{1}{r_2^2}$$

Die Kraft  $F_1$  wirkt im Moment, da die Masse  $m$  den geringsten Abstand zum Massezentrum  $M_s$  besitzt (Perihel). Die Kraft  $F_2$  wirkt dagegen, wenn der Abstand zwischen  $M_s$  und  $m$  am größten ist (Aphel). Die Konstante  $G$  in der Gleichung stellt die Gravitationskonstante dar. Sie ist eine Naturkonstante, welche die Masse eines Körpers mit der Gravitation in Beziehung setzt.

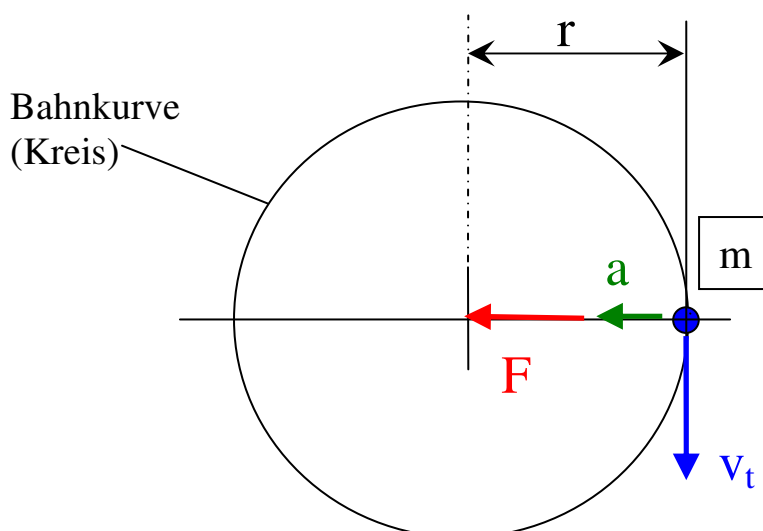
$$G = 6,67384 \times 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$$

## 1.2 Das Dynamische Grundgesetz:

Das Dynamische Grundgesetz von Newton beschreibt dagegen, welche Kraftwirkung in Beziehung mit einer beschleunigten Masse steht. Eine Masse bewegt sich dann beschleunigt, sobald sich entweder der Geschwindigkeitswert von ihr ändert oder sich die Richtung verändert, wobei der Ausgangspunkt der ist, dass sich eine kräftefreie Masse mit konstanter Geschwindigkeit entlang einer Geraden bewegen wird oder im Zustand des Stillstands verharrt (Beharrungsgesetz). Kurz gesagt, wenn sich der Geschwindigkeitsvektor  $v$  der Masse zeitlich ändert, dann liegt eine beschleunigte Bewegung vor, die einer Kraftwirkung auf diese Masse entspricht bzw. gleichzusetzen wäre.

Beziehen wir diese Gesetzmäßigkeit nun auf eine Bewegung entlang einer Kreisbahn, dann wirkt eine so genannte Zentripetalbeschleunigung  $a$  in Richtung des Kreismittelpunktes dieser Bahn. Um eine Masse  $m$  auf einer Kreisbahn zu halten, muss also eine Kraft  $F$  in Richtung des Kreismittelpunktes vorliegen. Die Masse besitzt während dieser Bewegung auf der Kreisbahn mit Radius  $r$  eine Tangentialgeschwindigkeit  $v_t$ .

$$F = m \cdot a = m \cdot \frac{v_t^2}{r} \quad \text{mit} \quad r \perp v_t \quad \text{und} \quad a \perp v_t$$



Nehmen wir jetzt die vereinfachte Situation an, dass das Gravitationsgesetz für eine Bewegung auf einer Kreisbahn gilt (anstatt auf einer Ellipsenbahn), dann kann man die Kraftwirkung, resultierend aus der Zentripetalbeschleunigung, mit der Anziehungskraft  $F$  des Gravitationsgesetzes gleichsetzen.

$$F = G \cdot M_s \cdot m \cdot \frac{1}{r^2} = m \cdot \frac{v_t^2}{r} \quad \Rightarrow \quad v_t^2 = G \cdot \frac{M_s}{r}$$

Im Spezialfall "Kreisbahn" gilt also, dass das Quadrat der Tangentialgeschwindigkeit  $v_t$  proportional zum Verhältnis der Zentralmasse  $M_s$  und umgekehrt proportional zum Radialabstand  $r$  ist.

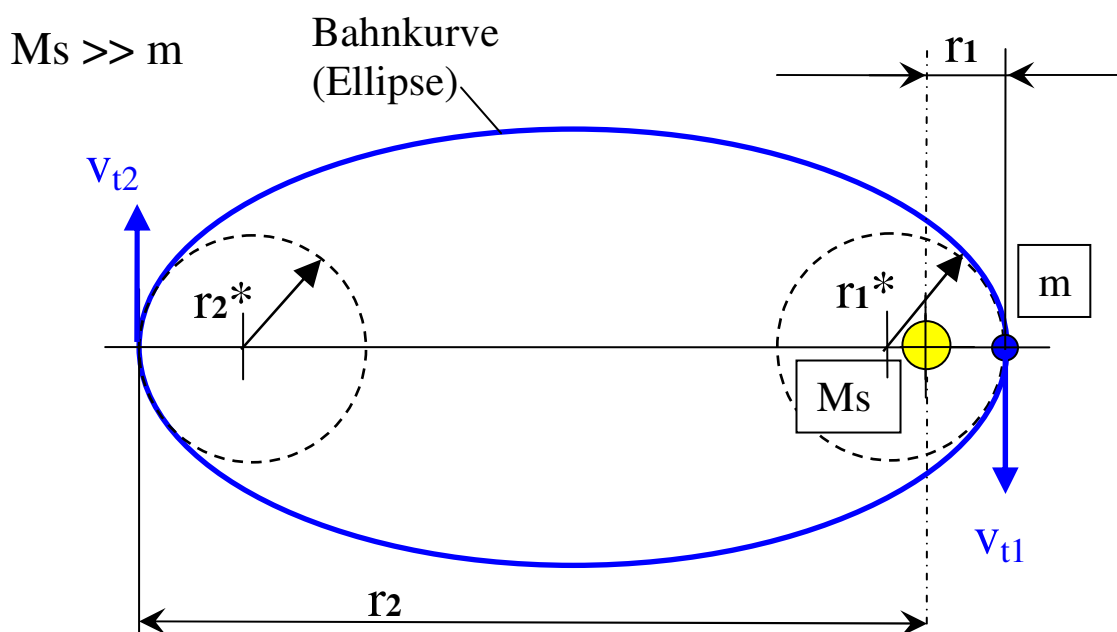
Setzt man z.B. die Erdbahn näherungsweise als Kreisbahn voraus, dann ergibt sich die folgende Tangentialgeschwindigkeit:

$$v_t^2 = G \cdot \frac{M_s}{r} = 6,67384 \times 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \cdot \frac{1,989 \times 10^{30} \text{ kg}}{149,6 \times 10^9 \text{ m}}$$

$$v_t = 29788 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Nun ist es aber so, dass sich die Masse  $m$  im momentanen Zustand auf einer Bahnkurve (Kreis) mit dem Bahnradius  $r^*$  bewegen kann, für die man die oben angeführte Gleichsetzung der Gravitationskraft und der Massenbeschleunigung ansetzen würde, auch wenn die wahre Bewegung der Masse  $m$  entlang einer elliptischen Bahnkurve erfolgt. Denn in jedem Punkt der Ellipsenbahn hat die Masse eine momentan zugeordnete Kurvenkrümmung mit dem Krümmungsradius  $r^*$ .

$$F = G \cdot M_s \cdot m \cdot \frac{1}{r^2} = m \cdot \frac{v_t^2}{r^*} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{r^*} = G \cdot \frac{M_s}{r^2 \cdot v_t^2}$$



Der Ausdruck  $1/r^*$  stellt somit eine Bahnkrümmung dar, deren Wert umso geringer ausfällt je schneller sich die Masse  $m$  im momentanen Abstand  $r_1$  oder  $r_2$  um das Zentrum  $M_s$  bewegt. Die hier abgeleitete Gleichung würden wir auch über den Drehimpulssatz erhalten, was an dieser Stelle als Beispielrechnung auch noch angeführt werden soll.

### 1.3 Das Gesetz zur Erhaltung des Drehimpulses:

Für unser Beispiel mit der Masse  $m$ , die sich auf einer Ellipsenbahn bewegt, lautet die Erhaltung des Drehimpulses  $L$  in den Punkten des Perihel und des Aphel:

$$L = m \cdot v_{t1} \cdot r_1 = m \cdot v_{t2} \cdot r_2 = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad v_{t1} = v_{t2} \cdot \frac{r_2}{r_1}$$

Die Zentripetalbeschleunigungen  $a_1$  und  $a_2$  errechnen sich dann wie folgt zu:

$$a_1 = \frac{v_{t1}^2}{r_1^*} = \frac{G \cdot M_s}{r_1^2} \quad \text{und} \quad a_2 = \frac{v_{t2}^2}{r_2^*} = \frac{G \cdot M_s}{r_2^2}$$

Bezogen auf das Massezentrum  $M_s$  ergeben sich dann die Relationen:

$$G \cdot M_s = \text{const.} = \frac{v_{t1}^2 \cdot r_1^2}{r_1^*} = \frac{v_{t2}^2 \cdot r_2^2}{r_2^*}$$

Substituiert man nun den Ausdruck  $v_{t1} = v_{t2} \cdot \frac{r_2}{r_1}$  aus dem Drehimpulssatz, dann ergibt das:

$$\frac{v_{t2}^2 \cdot r_2^2 \cdot r_1^2}{r_1^2 \cdot r_1^*} = \frac{v_{t2}^2 \cdot r_2^2}{r_2^*} = G \cdot M_s \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{r_1^*} = \frac{1}{r_2^*}$$

Das Ergebnis liefert uns nun die Aussage, dass die beiden Krümmungsradien  $r_1^*$  und  $r_2^*$  im Perihel und im Aphel denselben Wert haben müssen, was in Anbetracht der symmetrischen Lage der Ellipsenbahn (siehe Skizze) auch sofort bestätigt werden kann.

Die Bahnkrümmungsradien der Ellipse in den Punkten des Perihel und Aphel besitzen damit die folgenden funktionalen Abhängigkeiten.

$$\frac{1}{r^*} = G \cdot \frac{M_s}{r^2 \cdot v_t^2}$$

Die Krümmung  $1/r^*$  hängt also von den Parametern der Hauptmasse  $M_s$ , der momentanen Tangentialgeschwindigkeit  $v_t$  und vom Abstand zur zentralen Hauptmasse  $r$  ab.

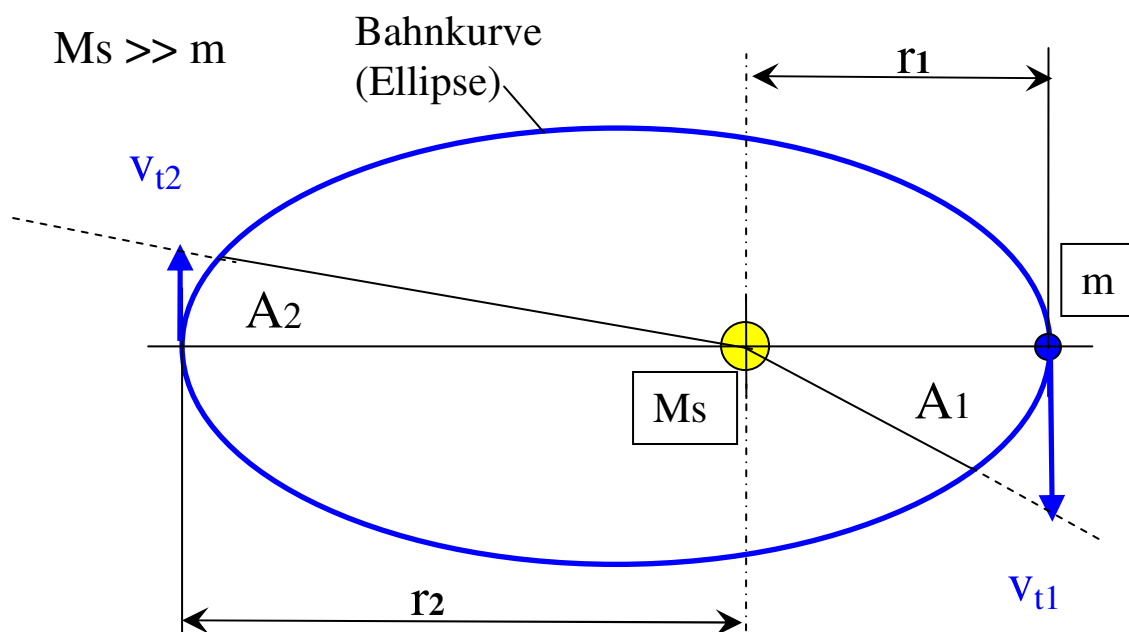
Schauen wir noch einmal auf das Gesetz zur Erhaltung des Drehimpulses zurück, so können wir diesen Erhaltungssatz mit dem zweiten Keplerschen Gesetz gleichsetzen:

„Die Verbindungslinie Sonne-Planet, der Leitstrahl oder Radiusvektor, überstreicht in gleichen Zeiträumen gleiche Flächengrößen.“

Das zeigt uns die Relation der Tangentialgeschwindigkeiten  $v_{t1}$  und  $v_{t2}$ , die sich umgekehrt zu den Radiusabständen  $r_1$  und  $r_2$  verhalten.

$$L = m \cdot v_{t1} \cdot r_1 = m \cdot v_{t2} \cdot r_2 = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad \frac{v_{t1}}{v_{t2}} = \frac{r_2}{r_1} \quad \text{bzw.} \quad v_t \cdot r = \text{const.}$$

Denn das Produkt der Tangentialgeschwindigkeit mit dem entsprechenden Radiusabstand bleibt konstant und bildet somit auch flächengleiche Sektoren  $A_1$  und  $A_2$ , die innerhalb einer bestimmten Zeitspanne  $\Delta t$  überstrichen würden.



$$A_1 = A_2 = \Delta t \cdot v_{t1} \cdot r_1 = \Delta t \cdot v_{t2} \cdot r_2 = \text{const.}$$

Bei weiterer Betrachtung der Situation, dass die Bewegung der kleinen Masse  $m$  nicht auf einer Ellipse, sondern idealisiert auf einer Kreisbahn stattfindet, würde  $r^*_1 = r^*_2 = r_1 = r_2 = r$  sein. Die Krümmungsformel reduziert sich dann in:

$$\frac{1}{r^*} = G \cdot \frac{M_s}{r^2 \cdot v_t^2} \quad \Rightarrow \quad r \cdot v_t^2 = G \cdot M_s$$



Die Tangentialgeschwindigkeit errechnet sich dann über die Umlaufzeit  $T_u$  mit:

$$v_t = \frac{2 \cdot r \cdot \pi}{T_u} \Rightarrow r \cdot v_t^2 = 4 \cdot \pi^2 \cdot \left( \frac{r^3}{T_u^2} \right) = G \cdot M_s$$

Bezogen auf ein System mit mehreren Planeten, die um eine Sonnenmasse  $M_s$  laufen, ergibt sich folgende Deutung:

„Die Quadrate der Umlaufzeiten  $T_u$  der Planeten verhalten sich wie die Kuben des großen Halbmessers (Radius)  $r$ .“

$$\left( \frac{r^3}{T_u^2} \right) = \frac{G \cdot M_s}{4\pi^2} = \text{const.}$$

Das ist dann genau die Aussage des dritten Keplerschen Gesetzes.

## 2. Übertragung der Gesetze auf die Lichtausbreitung (modellhaft)

### 2.1 Die Bahnkrümmung des Lichtes in der Nähe großer Massen:

Bei der Vorstellung, dass ein leerer und von keinerlei Masseneinflüssen berührter Raum vorliegt, so würde sich das Licht durch diesen Raum geradlinig bewegen. Es liegen keine Raumkrümmungen vor, die durch Massenobjekte wie der Sonne hervorgerufen werden und das Licht entlang dieser Raumdeformationen wandern lassen würden. Die „Allgemeine Relativitätstheorie“ beschreibt diese Wechselwirkung, inwieweit die Raumzeit durch Massen gekrümmt wird, und umgekehrt, inwieweit die Massen sich dann infolge der Raumzeitkrümmungen bewegen müssen.

Lichtstrahlen bzw. bewegte Lichtteilchen (modellhafte Annahme) unterscheiden sich wesentlich zu jenen Teilchen, aus welchen unsere massebehaftete Materie besteht. Denn Lichtteilchen besitzen keine Ruhemasse und dürften somit kaum mit dem „Dynamischen Grundgesetz“ oder dem „Gravitationsgesetz“ in Einklang gebracht werden, weil diese Beschreibungen stets mit den Massenwirkungen von Körpern einhergehen. Licht als masseloses Teilchen kann weder eine Gravitationswirkung auf eine Masse ausüben noch kann es durch äußere Einwirkungen (Kraftwirkungen) in irgendeiner Weise beschleunigt werden. Licht bewegt sich in allen Trägheitssystemen mit einer konstanten Fundamentalsgeschwindigkeit, also mit einer Naturkonstanten, die den Wert  $c = 299\,792\,458$  m/s besitzt.

Die Frage ist daher, ob wir diese Gesetzmäßigkeiten der Newtonschen Mechanik auf die Natur des Lichtes bzw. von Lichtteilchen anwenden können und was dabei als Resultat herauskommt? Um dieses zu probieren, sollen folgende Punkte als Ansatz dienen:

- Die Fundamentalsgeschwindigkeit des Lichtes ist  $c = \text{const.}$
- Lichtstrahlen werden an großen Massen abgelenkt (durch Beobachtungen bestätigt)
- Lichtstrahlen werden an der großen Masse gekrümmt, es existiert also in jedem Bahnpunkt des Lichtes ein entsprechender Krümmungsradius
- Die Annahme soll sein, dass die Lichtablenkung infolge Krümmung durch eine Beschleunigung  $a$  bewirkt wird

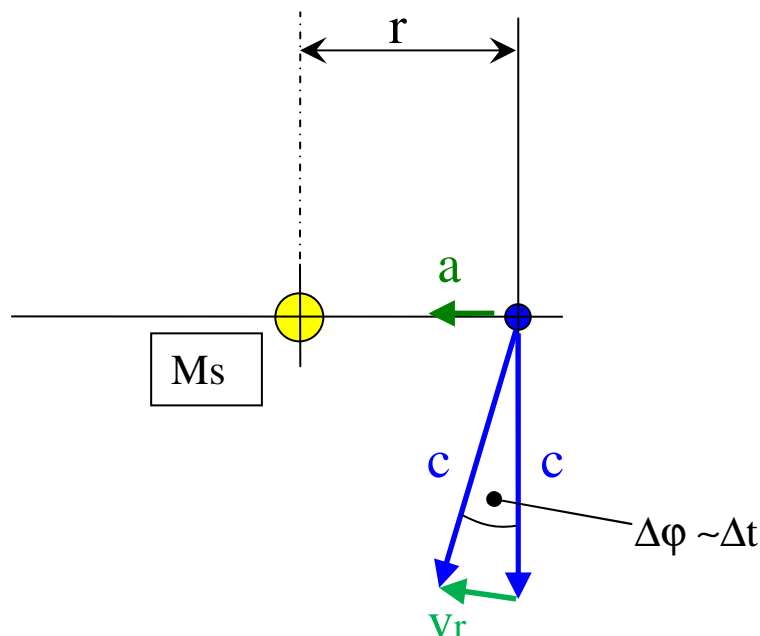
Der letztgenannte Punkt muss hier als „konstruierter“ Ansatz gelten, denn Licht kann nicht beschleunigt werden. Dieser Punkt ist quasi der Griff in die Trickkiste, der uns helfen soll, die Lichtablenkungen gemäß dieser Modellvorstellung berechnen zu können. Somit können wir dann auch mit den folgenden Berechnungsansätzen fortfahren:

- 1) Nach einer kurzen Zeit  $\Delta t$  legt das Licht eine Strecke  $\Delta s$  zurück:

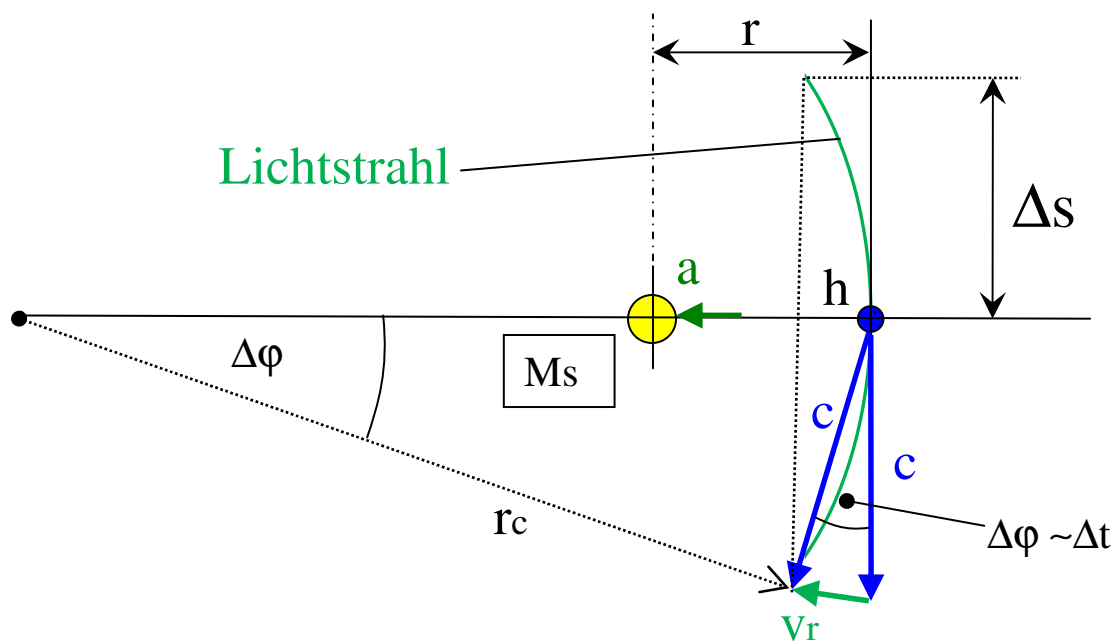
$$\Delta s = \Delta t \cdot c$$

- 2) Abhängig von der Beschleunigung  $a$  (Massenanziehung) erfährt das Licht in der Zeit  $\Delta t$  eine Radialkomponente  $v_r$  (Radialgeschwindigkeit):

$$a = \frac{G \cdot M_s}{r^2} \quad ; \quad \Delta\varphi = \frac{v_r}{c}$$



- 3) Die Radialgeschwindigkeit  $v_r$  soll mit dem Produkt aus  $\Delta t$  und der Beschleunigung  $a$  gleichgesetzt werden. Das sei an dieser Stelle ein weiterer Kunstgriff, weil eigentlich bei massebehafteten Körpern die Beschleunigung innerhalb der Zeit  $\Delta t$  erst auf den Wert  $v_r$  als Endgeschwindigkeit kontinuierlich erfolgen müsste. Die gemittelte Geschwindigkeit wäre daher  $\frac{1}{2} v_r$ . Im Falle des Lichtes soll sogleich der Endwert  $v_r$  als konstante Geschwindigkeitskomponente im Zeitinkrement  $\Delta t$  vorliegen. Die Änderung des Lichtpfades wird somit um die Winkelabweichung  $\Delta\varphi$  geschehen. Die Lichtgeschwindigkeit bleibt auch nach der  $\Delta\varphi$ -Ablenkung weiterhin  $c$ , und das auch für alle weiteren Zeitinkremente danach oder auch zuvor.
- 4) Über die nachfolgende Skizze soll veranschaulicht werden, in welcher Weise ein Lichtstrahl zu einer bestimmten Zeit gekrümmt wird. Es muss also der Krümmungsradius  $r_c$  berechnet werden, wobei man bei dieser Konstruktion davon ausgeht, dass die radiale Wegabweichung  $h$  des Lichtes innerhalb der Zeitspanne  $\Delta t$  sehr klein ist gegenüber der Wegstrecke  $\Delta s$  des Lichtes in dieser Zeit.



Anwendung des Satzes von Pythagoras:

$$r_c^2 = (r_c - h)^2 + \Delta s^2 = r_c^2 - 2 \cdot h \cdot r_c + h^2 + \Delta s^2 \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot h \cdot r_c = h^2 + \Delta s^2$$

Weil aber das Quadrat der Wegabweichung  $h$  in der Zeit  $\Delta t$  sehr klein gegenüber  $\Delta s^2$  ist, gilt angenähert:

$$2 \cdot h \cdot r_c \approx \Delta s^2 \quad \Rightarrow \quad r_c = \frac{\Delta s^2}{2h} \quad \text{mit} \quad h = \Delta t \cdot v_r = \Delta t^2 \cdot a$$

An dieser Stelle können nun die Ausdrücke für die Beschleunigung  $a$  und für die Wegstrecke  $\Delta s$  in der Gleichung für den Krümmungsradius  $r_c$  des Lichtes berücksichtigt werden:

$$r_c = \frac{(c \cdot \Delta t)^2}{2 \cdot \Delta t^2 \cdot \frac{G \cdot Ms}{r^2}} = \frac{c^2 \cdot r^2}{2 \cdot G \cdot Ms}$$

## 2.2 Der Grenzfall des Schwarzschild-Radius als Kriterium für ein „Schwarzes Loch“:

Anhand der bisher abgeleiteten Gleichung für den Krümmungsradius des Lichtstrahls zu einem bestimmten Zeitpunkt kann nun überprüft werden, was bei dem folgenden Szenario als Resultat hervorgeht.

Man stelle sich eine kugelförmige Massenansammlung  $M_s$  vor, die einen Radius  $r_s$  bis zur Oberfläche dieser Gesamtmasse aufweist. Ein Lichtstrahl soll diese Oberfläche bei seinem Weg dorthin tangieren, dann sieht die Gleichung so aus:

$$\frac{2 \cdot G \cdot Ms}{c^2} \cdot r_c = r_s^2 \quad , \text{ wobei dann } r_c > r_s \quad \text{sein muss!}$$

Läuft nun aber der Radius  $r_c$  gegen den Radius  $r_s$ , wenn also die Masse  $M_s$  extrem hoch wäre, dann bewegt sich das Licht irgendwann auf einer geschlossenen Kreisbahn mit  $r_c = r_s$  und kann dann dieser Masse nicht mehr entweichen. Es liegt dann der so genannte Schwarzschild-Radius vor, welcher das Kriterium für ein „Schwarzes Loch“ angibt. Die Kugeloberfläche mit Radius  $r_s$  wird in diesem auch als „Ereignishorizont eines Schwarzen Loches“ bezeichnet.

$$\underline{\underline{r_s = \frac{2 \cdot G \cdot Ms}{c^2}}} \quad , \text{ wenn } r_c \rightarrow r_s \text{ läuft.}$$

Das ist auch der Ausdruck, der in der Literatur [1] angegeben wird. Das wäre somit schon mal eine kleine Bestätigung dafür, dass sich mit den bisher abgeleiteten Gleichungen etwas anfangen lässt.

Ein Schwarzes Loch genügt damit der Bedingung:

$$r_s \leq \frac{2 \cdot G \cdot Ms}{c^2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{r_s}{Ms} \leq \frac{2 \cdot G}{c^2} = 1,485 \times 10^{-27} \frac{m}{kg}$$

Resultiert die Masse  $M_s$  aus einem Kugelvolumen  $V$ , dann ergibt sich die Dichte  $\rho_s$  :

$$\rho_s = \frac{Ms}{V} \quad , \text{ womit dann } Ms = \rho_s \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot r_s^3$$

$$\Rightarrow \frac{r_s}{Ms} = \frac{1}{\rho_s \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot r_s^2} \quad \Rightarrow \frac{3}{\rho_s \cdot 4\pi \cdot r_s^2} \leq \frac{2 \cdot G}{c^2} \quad \Rightarrow 1 \leq \frac{8 \cdot G \cdot \rho_s \cdot \pi \cdot r_s^2}{3 \cdot c^2}$$

Das wäre die Bedingung eines Schwarzen Loches, sofern die Dichte und die Kugeloberfläche mit dem Radius  $r_s$  des Massenobjektes als bekannt vorausgesetzt werden.

Zur Überprüfung, ob das Kriterium eines Schwarzen Loches erreicht ist, kann auch der folgende Ausdruck genommen werden, den wir einmal auf die Sonnenmasse anwenden werden.

$$r_s \leq Ms \cdot 1,485 \times 10^{-27} \frac{m}{kg} \quad \rightarrow r_s \leq 1,989 \times 10^{30} kg \cdot 1,485 \times 10^{-27} \frac{m}{kg} = 2953,7 m$$

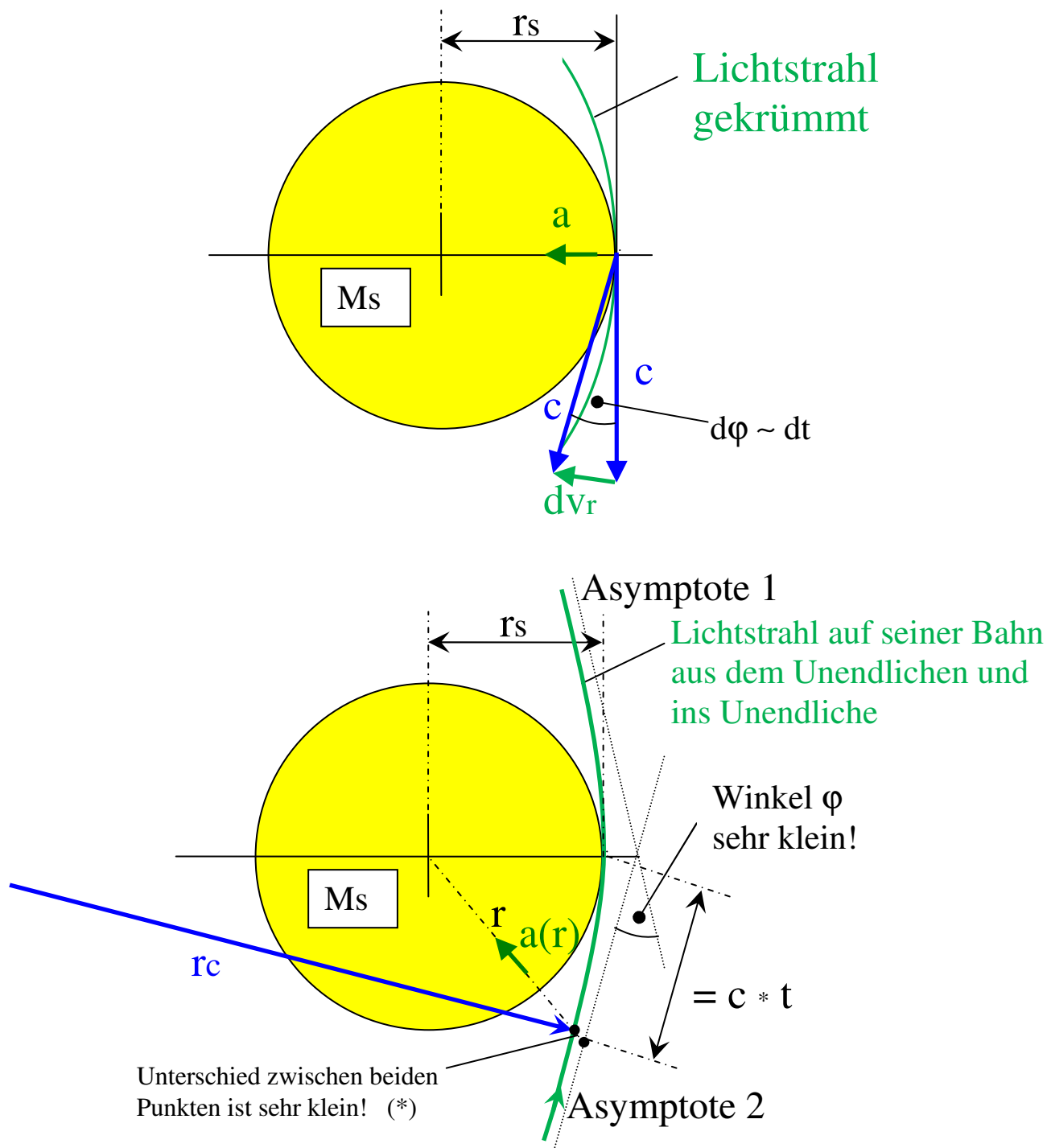
D.h., der Sonnenradius müsste unter diese Schwelle von 2953,7 m rutschen, damit bei der gegebenen Sonnenmasse  $M_s$  das Dichtekriterium für den Schwarzschild-Radius vorliegt. Der Radius unserer gegenwärtigen Sonne ist jedoch um den Faktor 235 750 größer als dieser kritische Wert.

### 3. Berechnung der Lichtablenkung an der Sonnenoberfläche

#### 3.1 Die Herleitung der differentiell kleinen Winkeländerung $d\varphi$ :

Mit dem bisher angeführten Formelwerk lässt sich nun endlich auch die Lichtablenkung an der Sonnenoberfläche berechnen, wie sie beispielsweise sehr gut bei einer totalen Sonnenfinsternis zu beobachten wäre.

Um diese Berechnung durchführen zu können, ist aber noch eine Übertragung auf differentiell kleine Winkel  $d\varphi$  und Geschwindigkeitskomponenten  $dv_r$  zu leisten. Das geschieht am besten mit folgenden Skizzen:



Die Winkelabweichung in der Zeit  $dt$  ist in diesem Fall:

$$dv_r = c \cdot d\varphi \quad \Rightarrow \quad d\varphi = \frac{dv_r}{c}$$

Nun ist die Radialgeschwindigkeit  $dv_r$  abhängig von der Beschleunigung  $a(r)$ :

$$dv_r \sim a(r)$$

Mit der Gleichung für die Beschleunigung  $a$  von Seite 6 gilt, wenn man für die Tangentialgeschwindigkeit  $v_t$  nun die Lichtgeschwindigkeit  $c$  einsetzt:

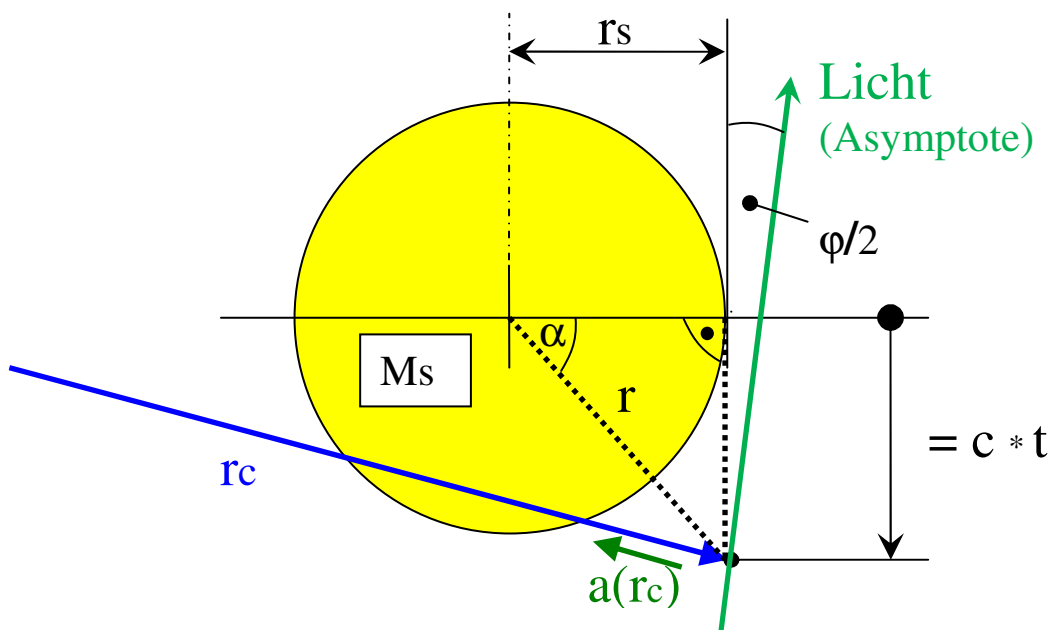
$$F = G \cdot M_s \cdot m \cdot \frac{1}{r^2} = m \cdot \frac{v_t^2}{r_c} = m \cdot a(r_c) \quad \Rightarrow \quad a(r_c) = \frac{c^2}{r_c}$$

Für die Beschleunigung wird hier als Variable nun der Radius  $r_c$  berücksichtigt, weil diese bzgl. der Herleitung aus der Zentripetalbeschleunigung diesen Bahnkrümmungsradius zu verwenden hat! Denn es liegt ja jetzt nicht mehr die vereinfachte Situation einer Kreisbahn wie auf der Seite 5 vor.

Die Krümmungsradien  $r_c$  des Lichtweges um die Zentralmasse können dann mit der hergeleiteten Gleichung von Seite 11 beschrieben werden:

$$r_c = \frac{(c \cdot dt)^2}{2 \cdot dt^2 \cdot \frac{G \cdot M_s}{r^2}} = \frac{c^2 \cdot r^2}{2 \cdot G \cdot M_s} \quad \Rightarrow \quad a(r) = \frac{c^2}{r_c} = \frac{2 \cdot G \cdot M_s}{r^2}$$

Damit hätten wir soweit erst einmal eine wegabhängige Gleichung für die Beschleunigung  $a$ . Die nächste Frage wäre also dann, wie sich die Variable  $r$  (Abstand des Bahnpunktes bis zum Mittelpunkt der Zentralmasse  $M_s$ ) in Abhängigkeit von einer Zeitvariablen  $t$  verhält.



Hier kommen wir nun zu der Fußnote (\*) der unteren Skizze von Seite 13, die besagt, dass die Ablenkung nur sehr gering ausfällt und man die Hilfskonstruktion (Seite 14) mittels des Satzes von Pythagoras verwenden kann. Der Radiusstrahl  $r$  errechnet sich dann mit.

$$r^2 = r_s^2 + c^2 \cdot t^2$$

Damit ergibt sich jetzt eine zeitabhängige Beschleunigung  $a(t)$ :

$$a(t) = \frac{2 \cdot G \cdot M_s}{r_s^2 + c^2 \cdot t^2} = \frac{c^2}{r_c}$$

Im Abstand  $c \cdot t$  wirkt aber in senkrechter Richtung zum Lichtstrahl nicht mehr die gesamte Beschleunigung  $a(t)$ , sondern nur eine Komponente  $a_c(t)$  davon, die vom Winkel  $\alpha$  abhängt. Ausgehend von einer voraussichtlich sehr kleinen Winkelabweichung  $\varphi$  kann hier der Kosinus-Wert von  $\alpha$  weiterhelfen. (siehe auch Skizze auf Seite 16)

$$\frac{r_s}{r} = \cos(\alpha) = \frac{r_s}{\sqrt{r_s^2 + c^2 \cdot t^2}} \quad \Rightarrow \quad a_c(t) = a(t) \cdot \cos(\alpha) = \frac{2 \cdot G \cdot M_s}{r_s^2 + c^2 \cdot t^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{c}{r_s}\right)^2 \cdot t^2}}$$

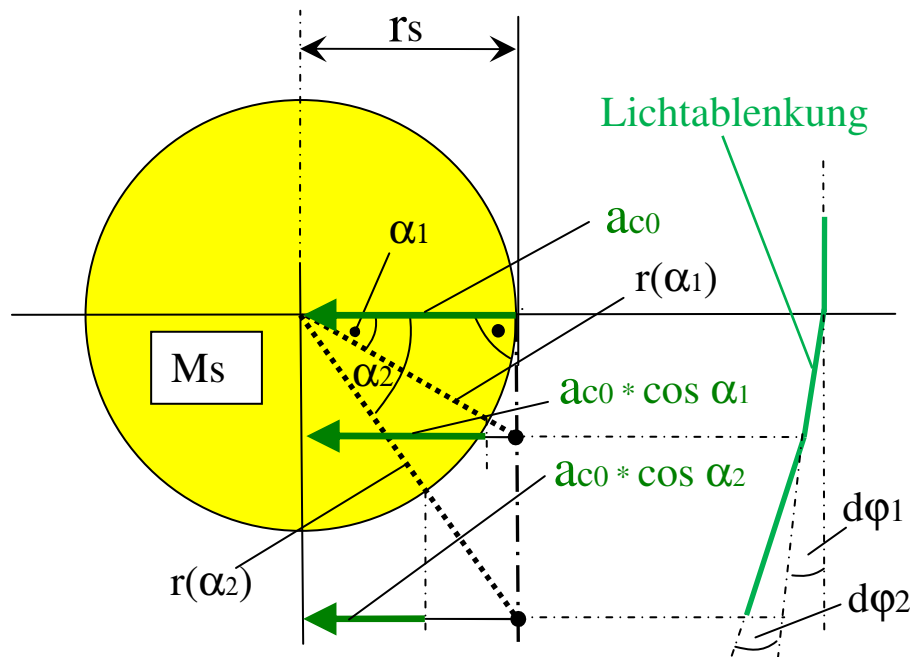
$$a_c(t) = \frac{2 \cdot G \cdot M_s}{c^2} \cdot \left[ \frac{1}{\left(\frac{r_s}{c}\right)^2 + t^2} \right] \cdot \left[ \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{c}{r_s}\right)^2 \cdot t^2}} \right]$$

Die differentiell kleine Winkelabweichung  $d\varphi$  ergibt sich dann mit:

$$dv_r = c \cdot d\varphi = a_c(t) \cdot dt \quad \Rightarrow \quad d\varphi = a_c(t) \cdot dt \cdot \frac{1}{c}$$

$$d\varphi = \frac{2 \cdot G \cdot M_s}{c^3} \cdot \left[ \frac{1}{\left(\frac{r_s}{c}\right)^2 + t^2} \right] \cdot \left[ \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{c}{r_s}\right)^2 \cdot t^2}} \right] \cdot dt$$

Integriert man den Ausdruck über die Zeitspanne innerhalb des Intervalles  $] t = -\infty, t = +\infty [$ , dann erhält man die gesamte Winkelabweichung  $\varphi$ . Es ist zugleich der aus den Asymptoten gebildete Schnittwinkel, wenn das Licht aus dem Unendlichen kommt und auch in das Unendliche wieder hinausgeht. Dabei sei der Zeitpunkt  $t_0 = 0$  so festgelegt, dass in diesem Moment das Licht die Sonnenoberfläche tangiert, also die Symmetrieachse des vorliegenden Problems durchquert.



Die Beschleunigung  $a_{c0}$  ist in diesem Fall:

$$a(t=0) = \frac{2 \cdot G \cdot M_s}{r_s^2 + c^2 \cdot t^2} = \frac{c^2}{r_c} = a_{c0}$$

Man erkennt anhand der obigen Skizze, dass für jedes  $r(\alpha)$  eine um den Kosinus reduzierte Beschleunigung zur Wirkung kommt und den Lichtstrahl um die differentiell kleine Winkeländerung  $d\varphi$  verbiegen lässt. Da der Krümmungsradius des Lichtstrahls  $r_c$  gegenüber  $r(\alpha)$  sehr dominiert, kann man quasi die Beschleunigungen  $a(t)$  senkrecht wirkend zum Lichtstrahl ansetzen. Für die Berechnung der Lichtablenkung an der Sonne ist das hinreichend genau.

### 3.2 Berechnung der Winkeländerung $\varphi$ an der Sonnenoberfläche:

Zum Abschluss muss der hergeleitete Ausdruck für  $d\varphi$  lediglich noch integriert werden, wobei man die Zeitintervalle nicht bis ins Unendliche berücksichtigen muss, da die Winkelabweichung im Großteil nur in der Nähe der Sonne erfolgt, sodass z.B. eine Zeitspanne von 1000 Sekunden eine ausreichende Konvergenz des gesuchten Wertes herbeiführt.

$$\varphi = \frac{2 \cdot G \cdot M_s}{c^3} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{\left(\frac{r_s}{c}\right)^2 + t^2} \right] \cdot \left[ \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{c}{r_s}\right)^2 \cdot t^2}} \right] \cdot dt$$



$$\varphi = \frac{4 \cdot G \cdot M_s}{c^3} \cdot \int_0^{+\infty} \left[ \frac{1}{\left(\frac{r_s}{c}\right)^2 + t^2} \right] \cdot \left[ \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{c}{r_s}\right)^2 \cdot t^2}} \right] \cdot dt$$

Mit folgenden Parametern ergibt sich final ein Wert:  $\varphi = \underline{\underline{8,5 \times 10^{-6} \text{ rad} = 1,75''}}$

$$G = 6,67384 \times 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \quad : \text{ Gravitationskonstante}$$

$$c = 2,99792458 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad : \text{ Lichtgeschwindigkeit im Vakuum}$$

$$M_s = 1,989 \times 10^{30} \text{ kg} \quad : \text{ Sonnenmasse}$$

$$r_s = 696,3 \times 10^6 \text{ m} \quad : \text{ Sonnenradius}$$

Wie man an dem Resultat erkennen kann, liegt der Wert sehr nah beim experimentell gemessenen Winkel, der ebenfalls mit 1,75'' angegeben wird. D.h., die hier abgeleiteten Gleichungen zeigen markante Übereinstimmungen mit den Angaben aus der Literatur der „Allgemeinen Relativitätstheorie“. Sowohl der Schwarzschild-Radius als auch die Lichtablenkung an der Sonne wären größtmäßig bestätigt.

Der nächste Punkt soll daher noch einen weiteren Versuch unternehmen, das hergeleitete Integral zur Berechnung von  $\varphi$  noch weiter zu vereinfachen.

### 3.3 Weitere Umformungen am Integral zur Berechnung von $\varphi$ :

Die Frage lautet: Wie kann der Ausdruck des Integrals eine weitere Vereinfachung erlangen?

$$\varphi = \frac{4 \cdot G \cdot M_s}{c^3} \cdot \int_0^{+\infty} \left[ \frac{1}{\left(\frac{r_s}{c}\right)^2 + t^2} \right] \cdot \left[ \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{c}{r_s}\right)^2 \cdot t^2}} \right] \cdot dt = ???$$

Zuerst erfolgt eine Substitution mit:  $z = \frac{c}{r_s} \cdot t$  und somit auch  $\frac{dz}{dt} = \frac{c}{r_s}$

$$\varphi = \frac{4 \cdot G \cdot Ms}{c^3} \cdot \int_0^{+\infty} \left[ \frac{\left(\frac{c}{r_s}\right)^2}{1 + \left(\frac{c}{r_s}\right)^2 t^2} \right] \cdot \left[ \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \right] \cdot dt = \frac{4 \cdot G \cdot Ms}{c^2 \cdot r_s} \cdot \int_0^{+\infty} \left[ \frac{\frac{c}{r_s}}{1+z^2} \right] \cdot \left[ \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \right] \cdot dt$$

$$\varphi = \frac{4 \cdot G \cdot Ms}{c^2 \cdot r_s} \cdot \int_0^{+\infty} \left[ \frac{1}{1+z^2} \right] \cdot \left[ \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \right] \cdot dz = \frac{4 \cdot G \cdot Ms}{c^2 \cdot r_s} \cdot \int_0^{+\infty} \left[ \frac{1}{(1+z^2)^{3/2}} \right] \cdot dz$$

Dieser Ausdruck lässt sich aber weiter vereinfachen, weil ...

$$\frac{d\left(\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\right)}{dz} = \frac{\sqrt{1+z^2} - z \cdot \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}}{1+z^2} = \frac{1+z^2 - z^2}{(1+z^2)^{3/2}} = \frac{1}{(1+z^2)^{3/2}} \cdot$$

Damit kann das Integral direkt aufgelöst und folgende Beziehung abgeleitet werden:

$$\varphi = \frac{4 \cdot G \cdot Ms}{c^2 \cdot r_s} \cdot \left[ \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \right]_{z=0}^{z=\infty} = \frac{4 \cdot G \cdot Ms}{c^2 \cdot r_s} \cdot 1 = 8,485 \times 10^{-6} \text{ rad} = 1,75008''$$

Vergeben wir für den Schwarzschild-Radius eine spezielle Bezeichnung  $R_0$ , dann schreibt sich der Sachverhalt wie folgt:

$$R_0 = \frac{2 \cdot G \cdot Ms}{c^2} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\varphi = \frac{2 \cdot R_0}{r_s}}}$$

Diese Gleichungen finden wiederum bestätigende Aussagen in den Quellen [1] und [2].

## 4. Nachwort

Anhand der in den einzelnen Kapiteln herangezogenen Gleichungen und Ableitungen haben wir zum Schluss sehen können, dass zumindest mit der hier dargestellten Modellvorstellung und den vorangestellten Ansätzen eine adäquate Berechnungsmöglichkeit zur Lichtablenkung zustande gekommen ist. Und nicht nur dies, auch der Begriff des Schwarzschild-Radius, der als Kriterium für ein Schwarzes Loches gilt, konnte in diesem Rahmen gut eingebettet werden.

Wie aber schon im Vorwort erwähnt, sollen die hier angeführten Ergebnisse nicht darüber hinwegtäuschen, dass mit dieser Abhandlung keinesfalls die wahre Natur der Lichtablenkung infolge der Raumzeitkrümmung bzw. aus der „Allgemeinen Relativitätstheorie“ wiedergegeben wurde!

Um dieses Skript noch ein wenig abzurunden, soll zum Ende hin noch etwas zu der Bahnform der Lichtablenkung gesagt werden, aber auch zu den Bahnformen im Allgemeinen, wie sie beispielsweise durch Planeten und Kometen in unserem Sonnensystem wahrgenommen werden. Um diese Bahnformen klassifizieren zu können, eignet sich die Energieformel für ein Zweikörper-System, die sich aus den Anteilen der kinetischen und potentiellen Energie zusammensetzt. Angesprochen wurden die verschiedenen Bahnformen ja schon auf Seite 4, als die Keplerschen Gesetze zur Sprache kamen. Nun soll näher darauf eingegangen werden.

Der kinetische Energie-Anteil einer Masse  $m$  um das Zentrum  $M_s$ :

$$E_{kin} = \frac{m \cdot v_t^2}{2}$$

Der potentielle Energie-Anteil einer Masse  $m$  im Gravitationsfeld des Massezentrums  $M_s$ :

$$E_{pot} = - \frac{G \cdot m \cdot M_s}{r}$$

Energiegleichung:

$$E = E_{kin} + E_{pot} = \frac{m \cdot v_t^2}{2} - \frac{G \cdot m \cdot M_s}{r} \Rightarrow E^* = \frac{E}{m} = \frac{v_t^2}{2} - \frac{G \cdot M_s}{r}$$

Klassifizierung der Bahnformen: (siehe hierzu auch den Quellenverweis [3])

hyperbolisch:  $E^* > 0$

parabolisch:  $E^* = 0$

elliptisch:  $E^* < 0$

Kreisbahn:  $v_t^2 = G \cdot \frac{M_s}{r}$  : siehe auch die Ableitung auf Seite 4 – oben

Die Kreisbahn ist ein Spezialfall der elliptischen Bahn.

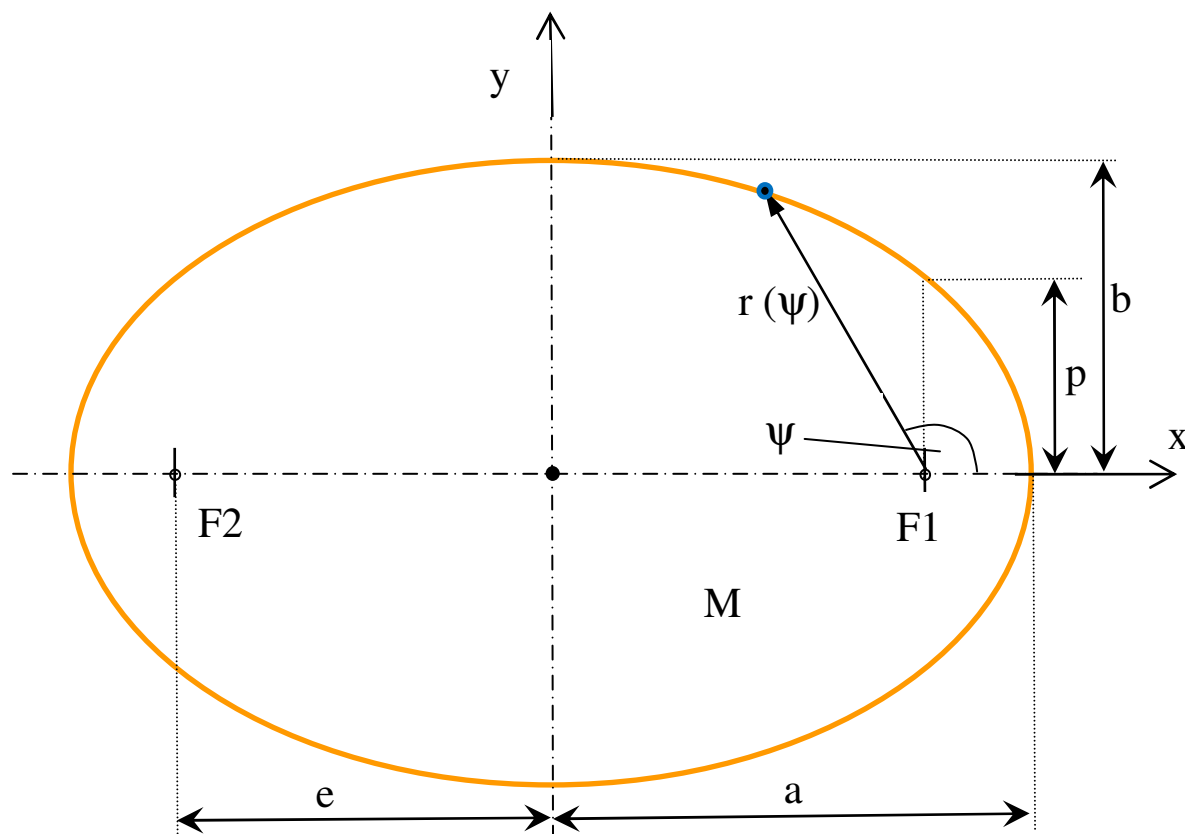
Bei der Lichtablenkung entlang der Sonnenoberfläche können wir in Analogie zu den hier aufgeführten Fällen die Annahme treffen, dass es sich um eine hyperbolische Bahnform handeln wird. Denn setzt man statt der Geschwindigkeit  $v_t$  die Lichtgeschwindigkeit  $c$  ein, so wird  $E^* > 0$  sein müssen.

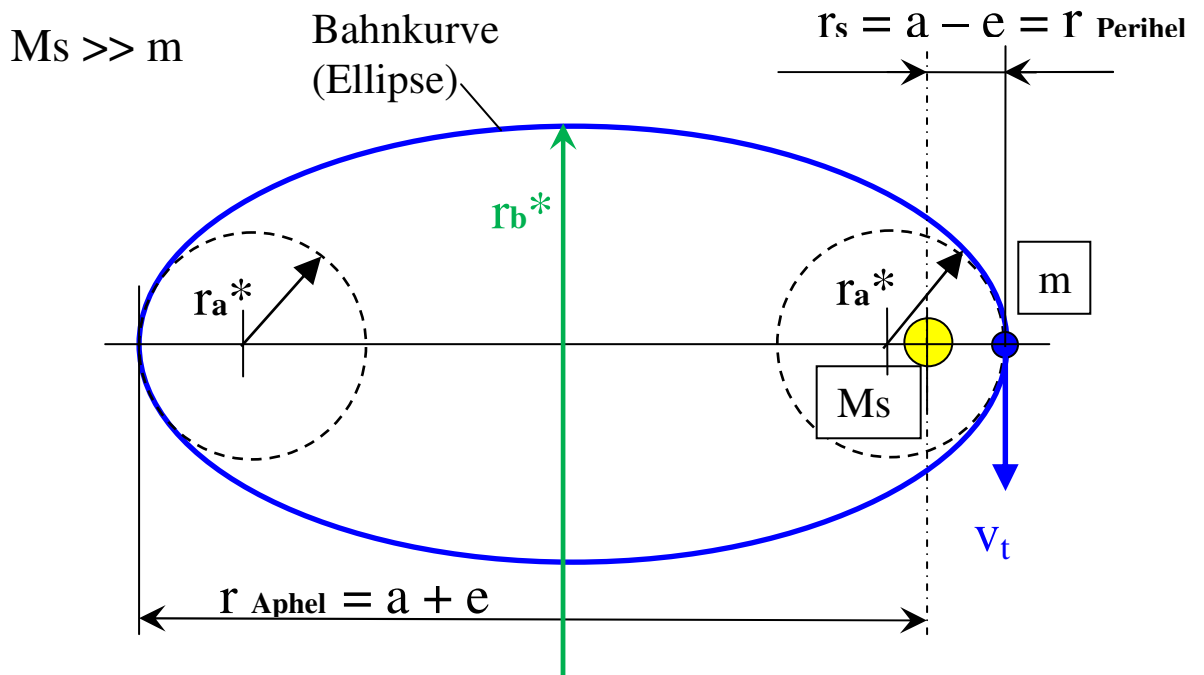
Denn schon der Grenzfall hin zur parabolischen Bahnform erfordert, dass das Kriterium für den Schwarzschild-Radius erfüllt sein müsste, weil  $E^* = 0$  zu folgender Beziehung führt:

$$E^* = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{R_0 = \frac{2 \cdot G \cdot M_S}{c^2}}}$$

Der Grenzfall der parabolischen Bahn ist damit ein punktueller Übergang von einer offenen Hyperbel- hin zu einer geschlossenen Ellipsen-Bahn. Bei Kleinkörpern (wie z.B. Kometen), die sich um ein Massezentrum (Sonne) bewegen, könnte es durchaus vorkommen, dass die anfänglich hyperbolisch geformte Bahn (kein wiederkehrender Komet) durch einen Planeten in seiner Bahn so gestört wird, dass die kinetische Energie nicht mehr ausreicht, dem System zu entfliehen. D.h., die Situation wechselt von  $E^* > 0$  zu  $E^* < 0$ , womit dann der Komet in eine elliptische Bahnform einschwingt und sich dann künftig als Wiederkehrer entpuppt. Das kann aber auch in der umgekehrten Weise geschehen, wenn ein Planet wie z.B. Jupiter wie eine Gravitationsschleuder wirkt und dem Komet so viel kinetische Energie zuführt, dass seine elliptische Bahn aufgebrochen und in eine hyperbolische deformiert wird. Er wird sich schließlich auf Nimmerwiedersehen verabschieden und aus dem System verschwinden.

Bleiben wir jedoch bei den elliptischen Planetenbahnen, die klassisch betrachtet auch zu den so genannten Keplerbahnen zählen. Zur Beschreibung einer Ellipse mit den Hauptachsen-Halbmessern  $a$  und  $b$  sollen folgende Skizzen dienen:





Mathematisch werden diese Eigenschaften der Ellipse wie folgt ausgedrückt:

Brennpunktgleichung für F1:

$$r(\psi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cdot \cos \psi}$$

Lineare Exzentrizität:

$$e = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Numerische Exzentrizität:

$$\varepsilon = \frac{e}{a}$$

Parameter p (Höhe über Brennpunkt):

$$p = \frac{b^2}{a}$$

Krümmungsradien der Hauptachsen:

$$r_a^* = \frac{b^2}{a} = p = a \cdot (1 - \varepsilon^2)$$

$$r_b^* = \frac{a^2}{b}$$

extremale Radiusabstände der Brennpunkte:

$$r_{\text{Perihel}} = \frac{p}{1 + \varepsilon} = a \cdot (1 - \varepsilon) = r_s$$

$$r_{\text{Aphel}} = \frac{p}{1 - \varepsilon} = a \cdot (1 + \varepsilon)$$

Gemäß dieser Bahndefinition erhält man die zuvor klassifizierten Bahnformen mit der folgenden Unterscheidung:

hyperbolisch:  $\varepsilon > 1$

parabolisch:  $\varepsilon = 1$

elliptisch:  $\varepsilon < 1$

Kreisbahn:  $\varepsilon = 0$

(somit  $a = b = r = \text{const.}$ )

Die lineare Exzentrizität  $\varepsilon$  lässt sich aber auch über die physikalischen Parameter errechnen, indem die Beziehung von Seite 7 zur Hilfe genommen wird, mit der die Krümmungsradien im Perihel und Aphel  $r^*a$  berechnet werden.

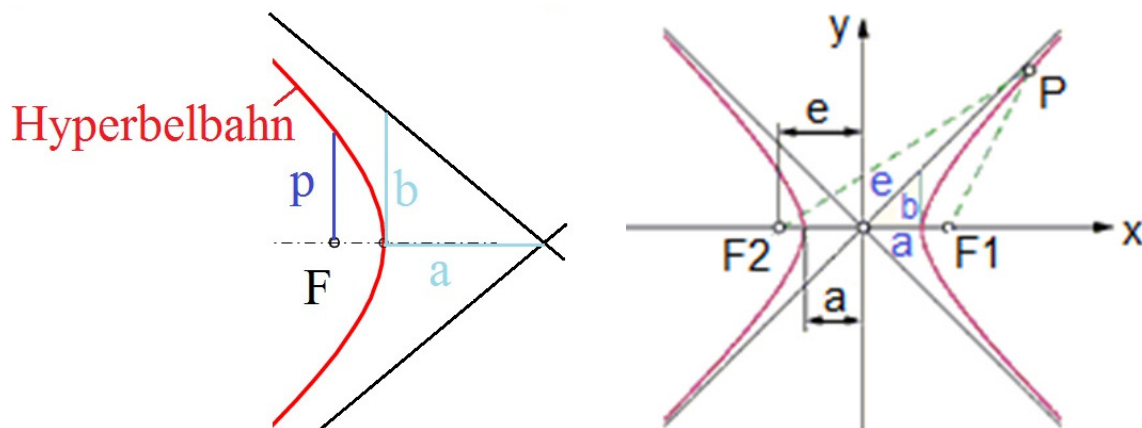
$$\frac{1}{r^*} = G \cdot \frac{Ms}{r_s^2 \cdot v_t^2} \quad \text{mit} \quad r = r_s = a - e = a \cdot (1 - \varepsilon) = r_{\text{Perihel}}$$

$$r_a^* = p = \frac{r_s^2 \cdot v_t^2}{G \cdot Ms} \quad \frac{p}{1 + \varepsilon} = r_s \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\varepsilon = \frac{r_s \cdot v_t^2}{G \cdot Ms} - 1}}$$

Dann lassen sich auch die Halbmesser der Ellipse berechnen und somit ihre Form bestimmen.

$$a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2} = \frac{r_s^2 \cdot v_t^2}{G \cdot Ms \cdot (1 - \varepsilon^2)} \quad \text{sowie} \quad \underline{\underline{b = a \cdot \sqrt{1 - \varepsilon^2}}}$$

Bei der Lichtablenkung an der Sonnenoberfläche haben wir dagegen eine offene Bahnform, die vom Verlauf her wie eine Hyperbelbahn aussehen wird. Eine Hyperbel, deren beiden Asymptoten sich unter einem sehr kleinen Winkel  $\varphi$  schneiden werden. Die Eigenschaften einer Hyperbel sollen daher auch noch erwähnt werden, weil sie auch zu den Typen der Keplerbahnen zählt.



Mathematisch werden die Eigenschaften der Hyperbel wie folgt ausgedrückt:

Brennpunktgleichung für F:

$$r(\psi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cdot \cos \psi}$$

Lineare Exzentrizität:

$$e = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Numerische Exzentrizität:

$$\varepsilon = \frac{e}{a}$$

Parameter p (Höhe über Brennpunkt):

$$p = \frac{b^2}{a}$$

Krümmungsradius der Hauptachse:

$$r_a^* = \frac{b^2}{a} = p = a \cdot (\varepsilon^2 - 1)$$

extremaler Radiusabstand vom Brennpunkt:

$$r_{\text{Perihel}} = \frac{p}{1 + \varepsilon} = a \cdot (\varepsilon - 1) = r_s$$

Zur Bestimmung des Asymptoten-Schnittwinkels werden dann noch die Parameter a und b benötigt:

$$a = \frac{p}{\varepsilon^2 - 1} = \frac{r_s^2 \cdot v_t^2}{G \cdot Ms \cdot (\varepsilon^2 - 1)} \quad \text{sowie} \quad \underline{\underline{b = a \cdot \sqrt{\varepsilon^2 - 1}}}$$

Den halben Schnittwinkel  $\varphi/2$  erhält man über die Tangensfunktion:

$$\tan(\varphi/2) = \frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{r_s \cdot v_t^2}{G \cdot Ms} - 1\right)^2 - 1}} \approx \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{r_s \cdot v_t^2}{G \cdot Ms}\right)^2}} = \frac{G \cdot Ms}{r_s \cdot v_t^2}$$

Die Näherung kann hier erfolgen, weil der Anteil  $\varepsilon^2$  im Wurzelausdruck alles andere dort größenmäßig überragt. Eine weitere Annäherung kann nun ebenfalls noch getätigt werden, weil man ja von einem sehr kleinen Winkel  $\varphi$  ausgeht. In diesem Fall gilt:

$$\tan(\varphi/2) \approx \varphi/2 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\varphi \approx \frac{2 \cdot G \cdot Ms}{r_s \cdot v_t^2}}}$$

Würde man jetzt für  $v_t$  die Lichtgeschwindigkeit  $c$  einsetzen, dann ergäbe sich nur der halbe Winkel der Lichtablenkung, so wie es gemäß den Newtonschen Gesetzen gefolgert werden müsste. Auf diese Unstimmigkeit wurde anfangs im Vorwort schon hingedeutet, die dann aber im Kapitel 3 trickreich „umschiff“ wurde. Dort wurde als Ergebnis jener Ausdruck abgeleitet:

$$\varphi = \frac{4 \cdot G \cdot Ms}{c^2 \cdot r_s} = 8,485 \times 10^{-6} \text{ rad} = 1,75008''$$

Dieser Ausdruck gilt aber nur für die Lichtablenkung. Bei bewegten Massen wie Kometen ist die weiter oben aufgeführte Gleichung für  $\varphi$  zu verwenden, wobei dann auch der erste Teil der Gleichung zu verwenden ist ohne weitere Näherung und Vereinfachung.

$$\Rightarrow \quad \varphi = 2 \cdot \arctan \left[ \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{r_s \cdot v_t^2}{G \cdot Ms} - 1\right)^2 - 1}} \right]$$

Damit wären zum Schluss noch die verschiedenen Bahnformen der klassischen Himmelsmechanik in der Fülle besprochen worden, dass man sie entsprechend ihrer Anteile aus kinetischer und potentieller Energie zu differenzieren weiß bzw. durch die gegebenen Parameter  $r_s$ ,  $M_s$  und  $v_t$  berechnen kann.

An dieser Stelle sei dem weiterhin interessierten Leser die literarische Quelle [4] wärmstens empfohlen. Denn es gibt kaum ein besseres Werk, um die Planetenbewegungen und Keplerschen Gesetze jemandem auf eine solch anschauliche und brillant beschriebene Weise nahezubringen. Richard Feynman versteht es wie kein Zweiter, dem Leser hier eine (zum Glück wiederentdeckte) Vorlesung darzureichen, die äußerst kurzweilig und plastisch die Schönheit der Geometrie in den Vordergrund stellt, um die Planetenbewegungen ohne Formelwerk zu erklären. Wer also zu den scharf Denkenden gehört und auch auf den mathematischen Exkurs verzichten könnte, wird von dieser speziellen Form der Vorlesung hellauf begeistert sein und eine wahre Spielwiese des Intellekts finden können.



#### **Quellenverweise und weiterführende Fachliteratur:**

[1]

Mechanik-Relativität-Gravitation - von G. Falk / W. Ruppel  
Springer-Verlag: Berlin – Heidelberg - New York 1973

[2]

Einführung in die spezielle und allgemeine Relativitätstheorie - von Hubert Goenner  
Spektrum – Akademischer Verlag Heidelberg – Berlin – Oxford 1996

[3]

Einführung in die Himmelsmechanik und Ephemeridenrechnung – von Andreas Guthmann  
BI-Wissenschaftsverlag: Mannheim – Leipzig – Wien – Zürich, 1994

[4]

Feynmans verschollene Vorlesung – Die Bewegung der Planeten um die Sonne  
von David L. Goodstein / Judith R. Goodstein  
Piper Verlag GmbH, München 1998

[5]

Taschenbuch der Mathematik – von Helmut Wörle / Johann Münch  
R. Oldenbourg Verlag 1971 – 5. verbesserte und erweiterte Auflage