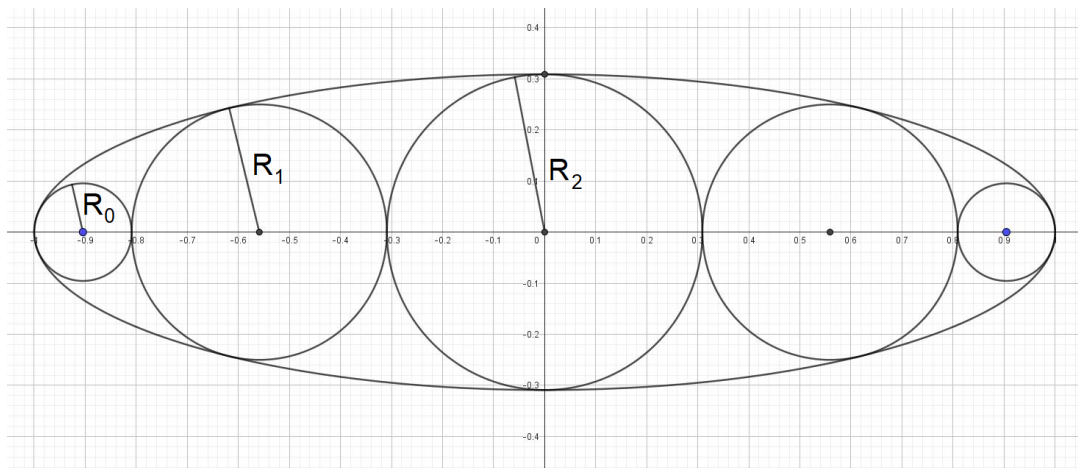


Über tangierende Kreisketten bei Kegelschnitten

zusammengetragen von
Kai-Uwe Ekrutt



inspiriert durch das Sangaku-Problem *)

„Ellipse mit einer eingeschriebenen Kette von 10 Kontakt-Kreisen“

*)

„Japanese Temple Geometry Problems - San Gaku“

H. Fukagawa and D. Pedoe

Winnipeg, Canada, 1989

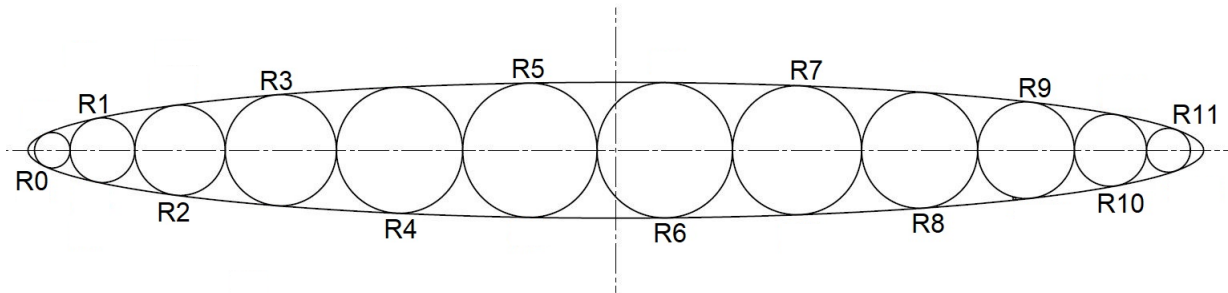
ISBN: 0-919611-21-4

=> Example 6.4 – Page 59, 151, 152

Tangierende Kreise innerhalb einer Ellipse / Hyperbel / Parabel

1) Tangierende Kreise in einer Ellipse

Beispiel: 12 tangierende Kreise (R0 ... R11) innerhalb einer Ellipse

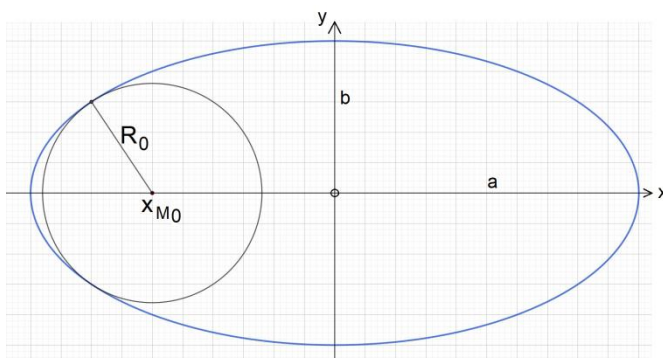


Gleichung einer Ellipse mit den Halbachsenparametern a und b:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1$$

Gleichung eines Kreises mit Radius R_0 mit Mittelpunkt x_{M0} :

$$(x - x_{M0})^2 + y^2 = R_0^2$$



Durch das Gleichsetzen von y^2 bei der Ellipsengleichung und der Kreisgleichung ergibt sich:

$$b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) = R_0^2 - (x - x_{M0})^2$$

$$b^2 + x^2 \left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right) - x \cdot 2x_{M0} + x_{M0}^2 - R_0^2 = 0$$

Hieraus resultiert dann die quadratische Gleichung bzgl. x :

$$x^2 - x \left(2x_{M0} \cdot \frac{a^2}{a^2 - b^2} \right) + (b^2 + x_{M0}^2 - R_0^2) \left(\frac{a^2}{a^2 - b^2} \right) = 0$$

$$x_{1;2} = x_{M0} \cdot \frac{a^2}{a^2 - b^2} \pm \sqrt{x_{M0}^2 \cdot \left(\frac{a^2}{a^2 - b^2} \right)^2 - (b^2 + x_{M0}^2 - R_0^2) \left(\frac{a^2}{a^2 - b^2} \right)^2 \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^2}}$$

Wegen der eindeutigen Lösung am Berührungspunkt Ellipse/Kreis muss gefordert werden, dass die Diskriminante (Ausdruck unter der Wurzel) zu Null wird.

$$x_{M0}^2 - (b^2 + x_{M0}^2 - R_0^2) \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 0$$

$$x_{M0}^2 \left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \right) - b^2 \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^2} + R_0^2 \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 0$$

$$x_{M0}^2 - (a^2 - b^2) + R_0^2 \cdot \frac{a^2 - b^2}{b^2} = 0$$

$$x_{M01;2} = \pm \sqrt{(a^2 - b^2) \cdot \left(1 - \frac{R_0^2}{b^2} \right)}$$

Mittelpunktgleichung für einen tangierenden Kreis mit Radius R_0 in einer Ellipse.

Betrachtet man nun den speziellen Fall, dass der Kreis die Ellipse im Punkt $(\pm a ; 0)$ berühren soll, dann gilt:

$$x_{M01;2} = \pm(a - R_0)$$

Setzt man das in die Lösung der quadratischen Gleichung ein, erhält man nach dem Quadrieren der Ausdrücke:

$$(a - R_0)^2 = (a^2 - b^2) \cdot \left(1 - \frac{R_0^2}{b^2} \right)$$

$$a^2 - 2aR_0 + R_0^2 = a^2 - b^2 - R_0^2 \cdot \frac{a^2}{b^2} + R_0^2$$

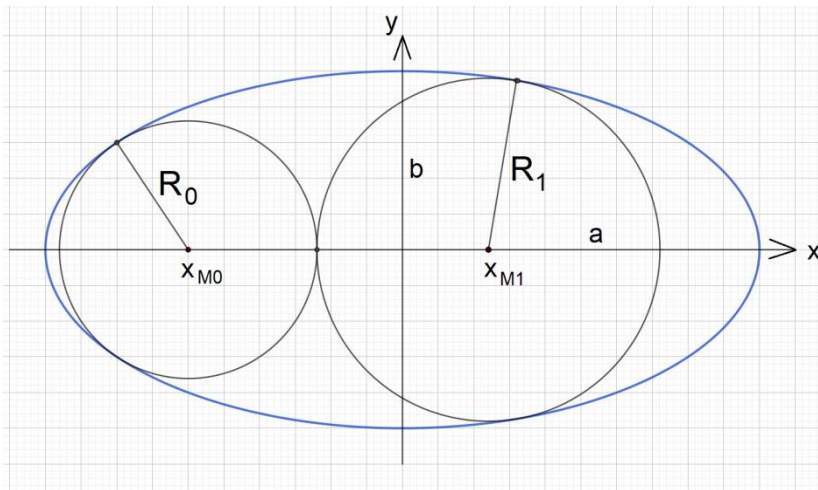
$$R_0^2 \cdot \frac{a^2}{b^2} - 2aR_0 + b^2 = 0$$

$$R_0^2 - 2R_0 \cdot \frac{b^2}{a} + \frac{b^4}{a^2} = 0$$

$$R_{0;2} = \frac{b^2}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{b^2}{a}\right)^2 - \frac{b^4}{a^2}} = \frac{b^2}{a} \quad \rightarrow \quad R_{0;2} = \frac{b^2}{a}$$

Hiermit bestätigt sich, dass an diesen Kreismittelpunkten ($x_{M0;2} = \pm(a - R_0)$) erwartungsgemäß der minimale Krümmungsradius der Ellipse vorliegen muss.

Betrachtet man einen weiteren Kreis in der Ellipse mit Radius R_1 , der den ersten Kreis von rechts aus tangiert, dann ist es mit den bisher hergeleiteten Gleichungen möglich, die Radien-Relation R_1 zu R_0 zu berechnen.



Es gilt nämlich allgemein:

$$x_{M0} = \pm \sqrt{(a^2 - b^2) \cdot \left(1 - \frac{R_0^2}{b^2}\right)}$$

$$x_{M1} = \pm \sqrt{(a^2 - b^2) \cdot \left(1 - \frac{R_1^2}{b^2}\right)}$$

sowie die Forderung, dass $x_{M1} > x_{M0}$ sein soll. Das bedeutet, der Startradius R_0 startet links innerhalb der Ellipse und die nachfolgenden tangierenden Radien $R_1, R_2, \dots$ ordnen sich fortlaufend rechts davon an.

Auf das gezeigte Beispiel bezogen folgt dann:

$$x_{M1} - x_{M0} = R_0 + R_1$$

Es muss jedoch in mehrere Fälle unterschieden werden, je nach Vorzeichen von x_{Mi} . Entweder stehen beide Kreismittelpunkte links oder rechts vom Koordinatenursprung (Vorzeichengleichheit) oder je ein Kreismittelpunkt steht links / rechts vom Koordinatenursprung (Vorzeichenungleichheit).

Im gezeigten Beispiel ist der Fall mit dem Vorzeichenwechsel gegeben, womit gelten würde:

$$+ \sqrt{(a^2 - b^2) \cdot \left(1 - \frac{R_1^2}{b^2}\right)} - \left(- \sqrt{(a^2 - b^2) \cdot \left(1 - \frac{R_0^2}{b^2}\right)} \right) = R_0 + R_1$$

$$\sqrt{(a^2 - b^2) \cdot \left(1 - \frac{R_1^2}{b^2}\right)} + \sqrt{(a^2 - b^2) \cdot \left(1 - \frac{R_0^2}{b^2}\right)} = R_0 + R_1$$

$$\sqrt{(a^2 - b^2) \cdot (b^2 - R_1^2)} = b(R_0 + R_1) - \sqrt{(a^2 - b^2) \cdot (b^2 - R_0^2)}$$

Nach dem Quadrieren der beiden Seiten ergibt sich:

$$(a^2 - b^2) \cdot (b^2 - R_1^2) =$$

$$= b^2(R_0 + R_1)^2 + (a^2 - b^2) \cdot (b^2 - R_0^2) - 2b(R_0 + R_1) \sqrt{(a^2 - b^2) \cdot (b^2 - R_0^2)}$$

$$(a^2 - b^2) \cdot (R_0^2 - R_1^2) = b^2(R_0 + R_1)^2 - 2b(R_0 + R_1) \sqrt{(a^2 - b^2) \cdot (b^2 - R_0^2)}$$

$$(a^2 - b^2) \cdot (R_0 - R_1) = b^2(R_0 + R_1) - 2b \sqrt{(a^2 - b^2) \cdot (b^2 - R_0^2)}$$

$$R_0 \cdot (a^2 - 2b^2) - R_1 \cdot a^2 = -2b \sqrt{(a^2 - b^2) \cdot (b^2 - R_0^2)}$$

$$R_1 = R_0 \cdot \left(1 - \frac{2b^2}{a^2}\right) + \frac{2b}{a^2} \sqrt{(a^2 - b^2) \cdot (b^2 - R_0^2)}$$

Diese Gleichung gilt allgemein auch in dem Fall, wenn die beiden Kreismittelpunkt-Werte von x_{Mi} negativ sind.

Es gilt für den Fall $x_{Mi} \leq x_{Mi+1} \leq 0$ oder $x_{Mi} \leq 0 < x_{Mi+1}$:

$$R_{i+1} = R_i \cdot \left(1 - \frac{2b^2}{a^2}\right) + \frac{2b}{a^2} \sqrt{(a^2 - b^2) \cdot (b^2 - R_i^2)}$$

Für den Fall $0 < x_{Mi} < x_{Mi+1}$ gilt jedoch:

$$R_{i+1} = R_i \cdot \left(1 - \frac{2b^2}{a^2}\right) - \frac{2b}{a^2} \sqrt{(a^2 - b^2) \cdot (b^2 - R_i^2)}$$

In diesem Zusammenhang lassen sich die Gleichungen auch für die Radien-Vorgänger anstatt für die Radien-Nachfolger angeben:

Es gilt für den Fall $x_{Mi} \leq x_{Mi+1} \leq 0$ oder $x_{Mi} \leq 0 < x_{Mi+1}$:

$$R_{i-1} = R_i \cdot \left(1 - \frac{2b^2}{a^2}\right) + \frac{2b}{a^2} \sqrt{(a^2 - b^2) \cdot (b^2 - R_i^2)}$$

Für den Fall $0 < x_{Mi} < x_{Mi+1}$ gilt jedoch:

$$R_{i-1} = R_i \cdot \left(1 - \frac{2b^2}{a^2}\right) - \frac{2b}{a^2} \sqrt{(a^2 - b^2) \cdot (b^2 - R_i^2)}$$

Damit ergibt die Summe von

$$R_{i+1} + R_{i-1} = R_i \cdot 2 \left(1 - \frac{2b^2}{a^2}\right)$$

und damit erhält man die rekursive Schreibweise für: (wenn $i = 1; 2; 3; \dots$)

$$R_{i+1} = R_i \cdot 2 \left(1 - \frac{2b^2}{a^2}\right) - R_{i-1}$$

$$R_{i+1} = R_i \cdot k - R_{i-1}$$

$$k = 2 \left(1 - \frac{2b^2}{a^2}\right)$$

Es handelt sich also um eine Rekursionsformel, die an die Chebyshev-Polynome erster Art erinnern und welche auf folgende Weise beschrieben werden:

$$T_{n+1}(x) = T_n(x) \cdot 2x - T_{n-1}(x)$$

Eine explizite Lösungsgleichung zur Berechnung der Radien R_i erhält man über die Theorie der linearen Differenzengleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Diese besitzen die rekursive Form:

$$f_n = f_{n-1} \cdot a_1 + f_{n-2} \cdot a_2 \quad \text{mit } a_2 \neq 0$$

mit dem Lösungsansatz:

$$f_n = \lambda^n = a_1 \cdot \lambda^{n-1} + a_2 \cdot \lambda^{n-2}$$

folgt die charakteristische Gleichung:

$$\lambda^2 - a_1 \cdot \lambda - a_2 = 0$$

mit den beiden Lösungen:

$$\lambda_{1;2} = \frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 + a_2}$$

In unserem Fall (tangierende Kreise in Ellipse) können wir folgende Koeffizienten einsetzen:

$$a_1 = k \quad \text{und} \quad a_2 = -1$$

$$\lambda_{1;2} = \frac{k}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2 - 1}$$

$$\lambda_{1;2} = \frac{k}{2} \pm i \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{k}{2}\right)^2}$$

wobei $k/2$ in folgendem Intervall gelten soll:

$$-1 < \frac{k}{2} < 1$$

$\frac{k}{2} = 1$ würde bedeuten, dass sich die Ellipse (als Kegelschnitt) zur Parabelform öffnen würde.

Da die λ betragsmäßig gleich 1 ergeben, kann die Lösung über die Exponentialschreibweise ausgedrückt werden.

$$|\lambda_{1;2}| = 1$$

$$\lambda_1 = e^{i\omega} \quad \lambda_2 = e^{-i\omega} \quad \text{mit}$$

$$\omega = \arctan\left(\frac{\sqrt{1 - \left(\frac{k}{2}\right)^2}}{\frac{k}{2}}\right) = \arccos\left(\frac{k}{2}\right)$$

Die Linearkombination der beiden λ -Lösungen liefert die Gesamtlösung zur Berechnung von f_n :

$$f_n = c_1 \cdot e^{i\omega n} + c_2 \cdot e^{-i\omega n}$$

$$f_n = c_1 \cdot \cos(n \cdot \omega) + i \cdot c_1 \cdot \sin(n \cdot \omega) + c_2 \cdot \cos(-n \cdot \omega) + i \cdot c_2 \cdot \sin(-n \cdot \omega)$$

$$f_n = \tilde{c}_1 \cdot \cos(n \cdot \omega) + \tilde{c}_2 \cdot \sin(n \cdot \omega)$$

$$f_n = A \cdot \cos(n \cdot \omega + \varphi)$$

Die Startbedingungen der Radien $f_0 = R_0$ und $f_1 = R_1$ liefern die Werte für die Parameter A und φ . Würde man beispielsweise den ersten Kreismittelpunkt mit $R_0 = b$ in den Koordinatenursprung der

Ellipse setzen, dann wäre das auch der maximale Radiuswert, der überhaupt erreicht werden kann, wenn der Parameter $\varphi = 0$ und $A = b$ wäre.

$$R_n = b \cdot \cos(n \cdot \omega + \varphi) = b \cdot \cos\left(n \cdot \arccos\left(\frac{k}{2}\right) + \varphi\right)$$

mit

$$\omega = \arccos\left(\frac{k}{2}\right)$$

Im Fall $n = 0$ und $\varphi = 0$ wäre der Startradius und die folgenden Radien:

$$R_0 = b \cdot \cos(0) = b$$

$$R_1 = b \cdot \cos\left(1 \cdot \arccos\left(\frac{k}{2}\right)\right)$$

$$R_2 = b \cdot \cos\left(2 \cdot \arccos\left(\frac{k}{2}\right)\right)$$

Ist der Startradius jedoch kleiner als der Ellipsenparameter b , dann muss der entsprechende Parameter φ noch berechnet werden.

$$\varphi = \pm \arccos\left(\frac{R_0}{b}\right)$$

Um mit dem Startkreis mit Radius R_0 im linken Bereich der Ellipse beginnen zu können, ist $\varphi \leq 0$ zu wählen.

$$\varphi = -\arccos\left(\frac{R_0}{b}\right)$$

Damit hätten wir nun endlich eine explizite Vorschrift zur Berechnung der Kreisebenen innerhalb einer Ellipse. Der Startradius R_0 sollte bei der weiteren Betrachtung mindestens so groß wie der minimale Krümmungsradius der Ellipse ausfallen!

$$R_0 \geq \frac{b^2}{a}$$

Im Fall $R_0 = \frac{b^2}{a}$ liegt der Kreismittelpunkt von R_0 dann bei $x_{M0} = -a + \frac{b^2}{a}$.

$$\varphi = -\arccos\left(\frac{R_0}{b}\right) = -\arccos\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\rightarrow R_n = b \cdot \cos\left(n \cdot \arccos\left(\frac{k}{2}\right) - \arccos\left(\frac{b}{a}\right)\right)$$

In diesem Zusammenhang kann man sich natürlich die Frage stellen, wo sich allgemein die Kreismittelpunkt-Werte x_{Mn} befinden? Gemäß der Herleitung auf Seite 3 gilt, wenn der Startradius ganz links in der Ellipse beginnt:

$$x_{Mn} = -\sqrt{(a^2 - b^2) \cdot \left(1 - \frac{R_n^2}{b^2}\right)}$$

sowie

$$R_n = b \cdot \cos\left(n \cdot \arccos\left(\frac{k}{2}\right) - \arccos\left(\frac{R_0}{b}\right)\right)$$

$$\rightarrow x_{Mn} = -\sqrt{(a^2 - b^2) \cdot \left(1 - \cos^2\left(n \cdot \arccos\left(\frac{k}{2}\right) - \arccos\left(\frac{R_0}{b}\right)\right)\right)}$$

$$\rightarrow x_{Mn} = -\sqrt{(a^2 - b^2)} \cdot \sin\left(n \cdot \arccos\left(\frac{k}{2}\right) - \arccos\left(\frac{R_0}{b}\right)\right)$$

Eine weitere Frage ist ebenfalls sehr interessant, nämlich wie viele tangierende Kreise sich innerhalb der Ellipse befinden können. Dabei ist aber zu beachten, dass der Startkreisradius R_0 stets mindestens dem minimalen Krümmungsradius der Ellipse entsprechen muss!

Es sei also:

$$R_0 = \frac{b^2}{a}$$

$$R_n = b \cdot \cos\left(n \cdot \arccos\left(\frac{k}{2}\right) - \arccos\left(\frac{R_0}{b}\right)\right)$$

bzw.

$$R_{N-1} = b \cdot \cos\left((N-1) \cdot \arccos\left(\frac{k}{2}\right) - \arccos\left(\frac{R_0}{b}\right)\right)$$

$$R_{N-1} = b \cdot \cos\left((N-1) \cdot \arccos\left(1 - \frac{2b^2}{a^2}\right) - \arccos\left(\frac{b}{a}\right)\right)$$

bei N Kreisen, die sich innerhalb der Ellipse befinden.

Als Zwischenschritt können folgende Umformungen erzeugt werden:

$$\arccos\left(1 - \frac{2b^2}{a^2}\right) = \pi - \arccos\left(\frac{2b^2}{a^2} - 1\right) = \pi - 2 \cdot \arccos\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\arccos\left(1 - \frac{2b^2}{a^2}\right) = \pi - \left(\pi - 2 \cdot \arcsin\left(\frac{b}{a}\right)\right) = 2 \cdot \arcsin\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\rightarrow R_{N-1} = b \cdot \cos\left((N-1) \cdot 2 \cdot \arcsin\left(\frac{b}{a}\right) - \arccos\left(\frac{b}{a}\right)\right)$$

$$R_{N-1} = b \cdot \cos \left((2N-1) \cdot \arcsin \left(\frac{b}{a} \right) - \arcsin \left(\frac{b}{a} \right) - \arccos \left(\frac{b}{a} \right) \right)$$

$$R_{N-1} = b \cdot \cos \left((2N-1) \cdot \arcsin \left(\frac{b}{a} \right) - \frac{\pi}{2} \right)$$

mit $\cos(\alpha) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ folgt dann:

$$R_{N-1} = b \cdot \sin \left(\pi - (2N-1) \cdot \arcsin \left(\frac{b}{a} \right) \right)$$

und mit der Forderung $R_{N-1} \geq \frac{b^2}{a}$ resultiert dann:

$$\frac{b^2}{a} \leq b \cdot \sin \left(\pi - (2N-1) \cdot \arcsin \left(\frac{b}{a} \right) \right)$$

$$\arcsin \left(\frac{b}{a} \right) \leq \pi - (2N-1) \cdot \arcsin \left(\frac{b}{a} \right)$$

$$2N \cdot \arcsin \left(\frac{b}{a} \right) \leq \pi$$

$$\frac{b}{a} \leq \sin \left(\frac{\pi}{2N} \right)$$

bzw.

$$N \leq \frac{\pi}{2 \cdot \arcsin \left(\frac{b}{a} \right)}$$

Berechnungsbeispiel (1): Ellipse mit 5 tangierenden Kreisen, wenn $R_0 = \frac{b^2}{a} = R_4$ und $a = 1$

Berechnung des Ellipsenparameters b:

$$\frac{b}{a} \leq \sin\left(\frac{\pi}{2N}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{1}{2\phi} = \frac{\phi-1}{2} = 0,3090 \dots$$

$$\rightarrow b = \frac{\phi-1}{2} = 0,3090 \dots \rightarrow R_0 = \frac{b^2}{a} = \left(\frac{\phi-1}{2}\right)^2 = \frac{2-\phi}{4} = 0,09549 \dots$$

mit dem Wert für den „Goldenen Schnitt“

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618 \dots$$

Berechnung des k-Parameters für die rekursive Formel für die Radien:

$$k = 2\left(1 - \frac{2b^2}{a^2}\right) = 2\left(1 - \frac{2-\phi}{2}\right) = 2 - 2 + \phi = \phi$$

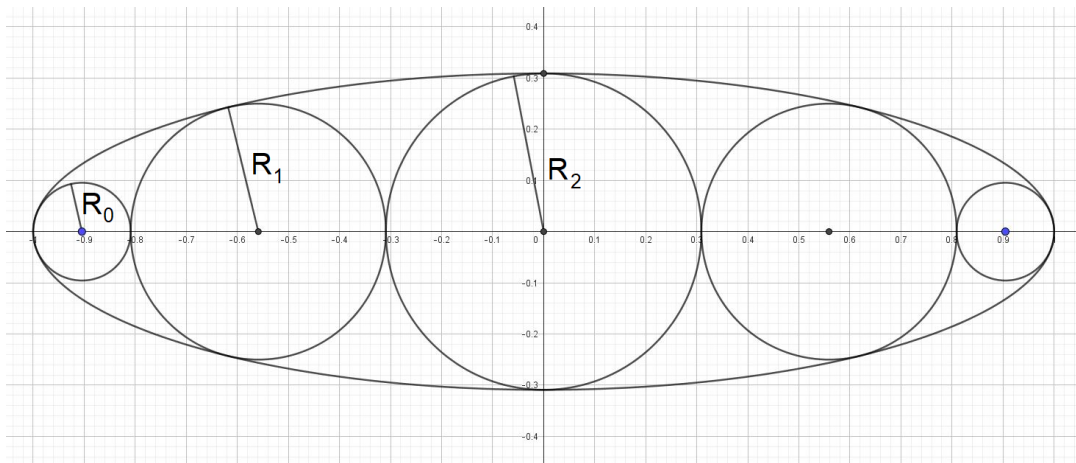
Berechnung der weiteren Radien:

$$R_n = b \cdot \cos\left(n \cdot \arccos\left(\frac{k}{2}\right) - \arccos\left(\frac{R_0}{b}\right)\right) = \frac{\phi-1}{2} \cdot \cos\left(n \cdot \arccos\left(\frac{\phi}{2}\right) - \arccos\left(\frac{\phi-1}{2}\right)\right)$$

$$R_1 = \frac{\phi-1}{2} \cdot \cos\left(1 \cdot \arccos\left(\frac{\phi}{2}\right) - \arccos\left(\frac{\phi-1}{2}\right)\right) = \frac{\phi-1}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{5} - \frac{2\pi}{5}\right)$$

$$R_1 = \frac{\phi-1}{2} \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\phi-1}{2} \cdot \frac{\phi}{2} = \frac{1}{4} \cdot (\phi^2 - \phi) = \frac{1}{4} = R_3$$

$$R_2 = \frac{\phi-1}{2} \cdot \cos\left(2 \cdot \arccos\left(\frac{\phi}{2}\right) - \arccos\left(\frac{\phi-1}{2}\right)\right) = \frac{\phi-1}{2} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{5} - \frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\phi-1}{2} = b$$



Berechnungsbeispiel (2): Ellipse mit Parameter $k = 0$, wenn $R_0 = \frac{b^2}{a}$ und $a = 1$

Berechnung des Ellipsenparameters b:

$$k = 2 \left(1 - \frac{2b^2}{a^2} \right) = 0$$

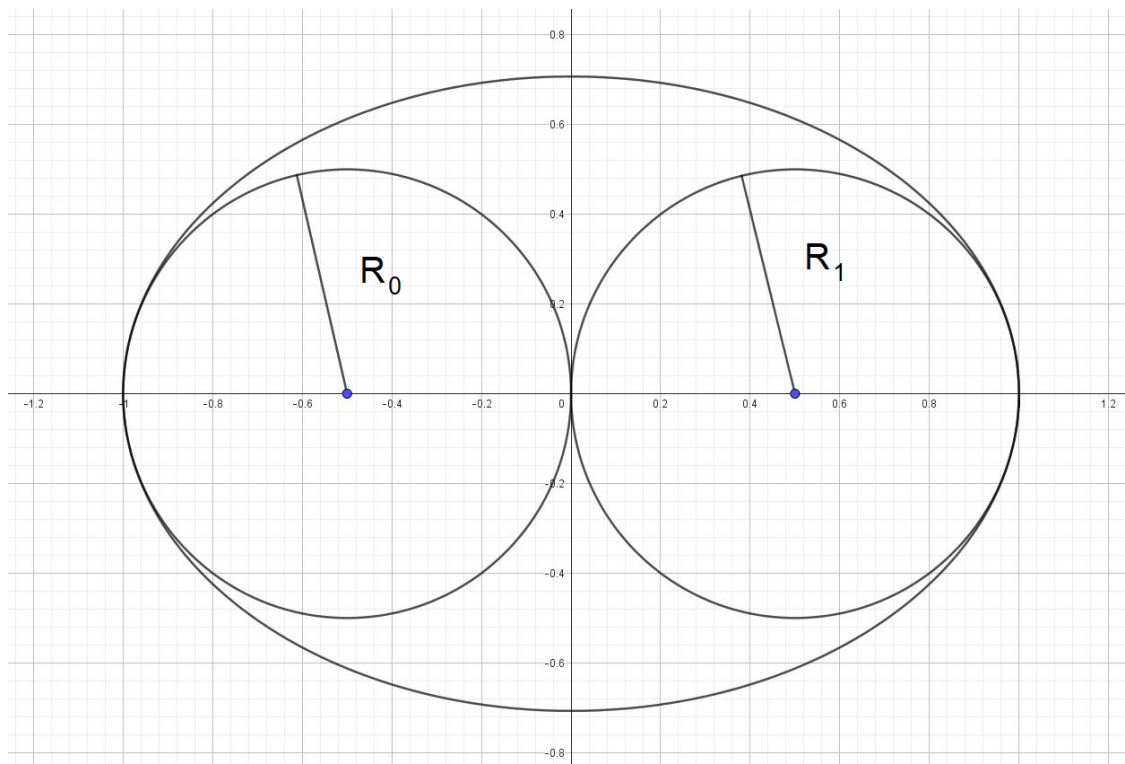
$$\rightarrow \left(1 - \frac{2b^2}{1} \right) = 0 \quad \rightarrow b = \sqrt{\frac{1}{2}} \quad \rightarrow R_0 = \frac{1}{2}$$

Anzahl der tangierenden Kreise in der Ellipse:

$$N \leq \frac{\pi}{2 \cdot \arcsin\left(\frac{b}{a}\right)} = \frac{\pi}{2 \cdot \arcsin\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)} = \frac{\pi}{2 \cdot \frac{\pi}{4}} = 2$$

$$R_1 = b \cdot \cos \left(1 \cdot \arccos\left(\frac{k}{2}\right) - \arccos\left(\frac{R_0}{b}\right) \right)$$

$$R_1 = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \cos \left(1 \cdot \arccos(0) - \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right) = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$



Berechnungsbeispiel (3): Ellipse mit Parameter $k = 1$, wenn $R_0 = \frac{b^2}{a}$ und $a = 1$

Berechnung des Ellipsenparameters b :

$$k = 2 \left(1 - \frac{2b^2}{a^2} \right) = 1$$

$$\rightarrow \left(1 - \frac{2b^2}{1} \right) = \frac{1}{2} \quad \rightarrow b = \frac{1}{2} \quad \rightarrow R_0 = \frac{1}{4}$$

Anzahl der tangierenden Kreise in der Ellipse:

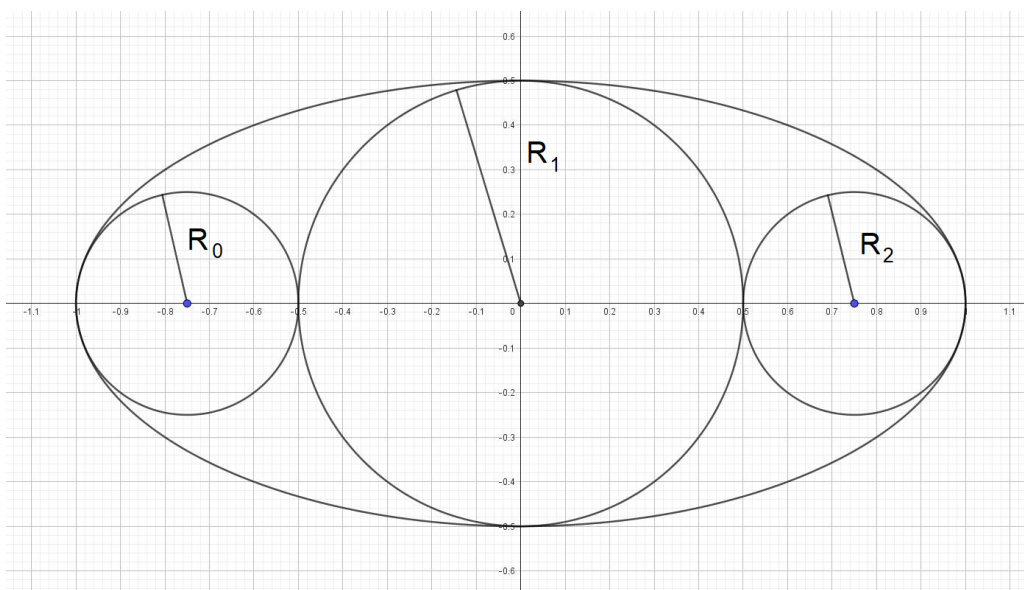
$$N \leq \frac{\pi}{2 \cdot \arcsin\left(\frac{b}{a}\right)} = \frac{\pi}{2 \cdot \arcsin\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\pi}{2 \cdot \frac{\pi}{6}} = 3$$

$$R_1 = b \cdot \cos \left(1 \cdot \arccos\left(\frac{k}{2}\right) - \arccos\left(\frac{R_0}{b}\right) \right)$$

$$R_1 = \frac{1}{2} \cdot \cos \left(1 \cdot \arccos\left(\frac{1}{2}\right) - \arccos\left(\frac{1}{2}\right) \right) = \frac{1}{2} \cdot \cos(0) = \frac{1}{2} = b$$

$$R_2 = \frac{1}{2} \cdot \cos \left(2 \cdot \arccos\left(\frac{k}{2}\right) - \arccos\left(\frac{R_0}{b}\right) \right)$$

$$R_2 = \frac{1}{2} \cdot \cos \left(2 \cdot \arccos\left(\frac{1}{2}\right) - \arccos\left(\frac{1}{2}\right) \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = R_0$$



Berechnungsbeispiel (4): Ellipse mit vorgegebenen Radien R_0 , R_1 und R_2

Es sei:

$$R_0 = 1.2 \quad R_1 = 2.1 \quad R_2 = 2.9$$

Zu beachten ist, dass abschließend zwei Prüfungen erfolgen sollten:

a) der Parameter k muss sich in dem Intervall $-2 < k < 2$ befinden!b) R_0 muss mindestens dem minimalen Krümmungsradius der Ellipse entsprechen:

$$R_0 \geq \frac{b^2}{a}$$

Berechnung des Parameters k aus der Rekursionsformel:

$$R_2 = R_1 \cdot k - R_0 \quad \rightarrow \quad k = \frac{R_0 + R_2}{R_1}$$

$$k = \frac{1.2 + 2.9}{2.1} = 1.95238 \dots$$

Der Parameter befindet sich somit im geforderten Intervall. Außerdem ist:

$$k = 2 \left(1 - \frac{2b^2}{a^2} \right) \quad \rightarrow \quad \frac{k}{2} = 1 - \frac{2b^2}{a^2} \quad \rightarrow \quad a^2 = \frac{2b^2}{1 - \frac{k}{2}}$$

Der Radius R_1 lässt sich über R_0 berechnen (siehe Seite 4):

$$R_1 = R_0 \cdot \left(1 - \frac{2b^2}{a^2} \right) + \frac{2b}{a^2} \sqrt{(a^2 - b^2) \cdot (b^2 - R_0^2)}$$

$$R_1 = R_0 \cdot \frac{k}{2} + \left(1 - \frac{k}{2} \right) \sqrt{(a^2 - b^2) \cdot \left(1 - \frac{R_0^2}{b^2} \right)}$$

$$\left(R_1 - R_0 \cdot \frac{k}{2} \right)^2 = \left(1 - \frac{k}{2} \right)^2 \cdot (a^2 - b^2) \cdot \left(1 - \frac{R_0^2}{b^2} \right) = \left(1 - \frac{k}{2} \right)^2 \cdot \left(\frac{2b^2}{1 - \frac{k}{2}} - b^2 \right) \cdot \left(1 - \frac{R_0^2}{b^2} \right)$$

$$\left(R_1 - R_0 \cdot \frac{k}{2} \right)^2 = \left(1 - \frac{k}{2} \right) \cdot \left(1 + \frac{k}{2} \right) \cdot (b^2 - R_0^2)$$

$$\rightarrow b = \sqrt{\frac{\left(R_1 - R_0 \cdot \frac{k}{2} \right)^2}{1 - \frac{k^2}{4}} + R_0^2} = \sqrt{\frac{R_1^2 - R_0 \cdot R_1 \cdot k + R_0^2}{1 - \frac{k^2}{4}}}$$

$$\rightarrow b = 4.4458184 \dots$$

Mit der Berechnung des Ellipsenparameters b folgt dann sofort auch a .

$$a = b \cdot \sqrt{\frac{2}{1-\frac{k}{2}}} = 40.7465986 \dots \quad \frac{b}{a} = \sqrt{\frac{1-\frac{k}{2}}{2}} = 0.1091 \dots$$

Damit kann die Prüfung bzgl. des minimalen Krümmungsradius der Ellipse erfolgen:

$$R_0 \geq \frac{b^2}{a} = 0.485 \dots$$

Abschließend bleibt dann noch die Anzahl der tangierenden Kreise in der Ellipse zu berechnen.

$$N \leq \frac{\pi}{2 \cdot \arcsin\left(\frac{b}{a}\right)} = \frac{\pi}{2 \cdot \arcsin(0.1091)} = 14.367 \dots$$

$$N = 14$$

mit dem letzten Radiuswert:

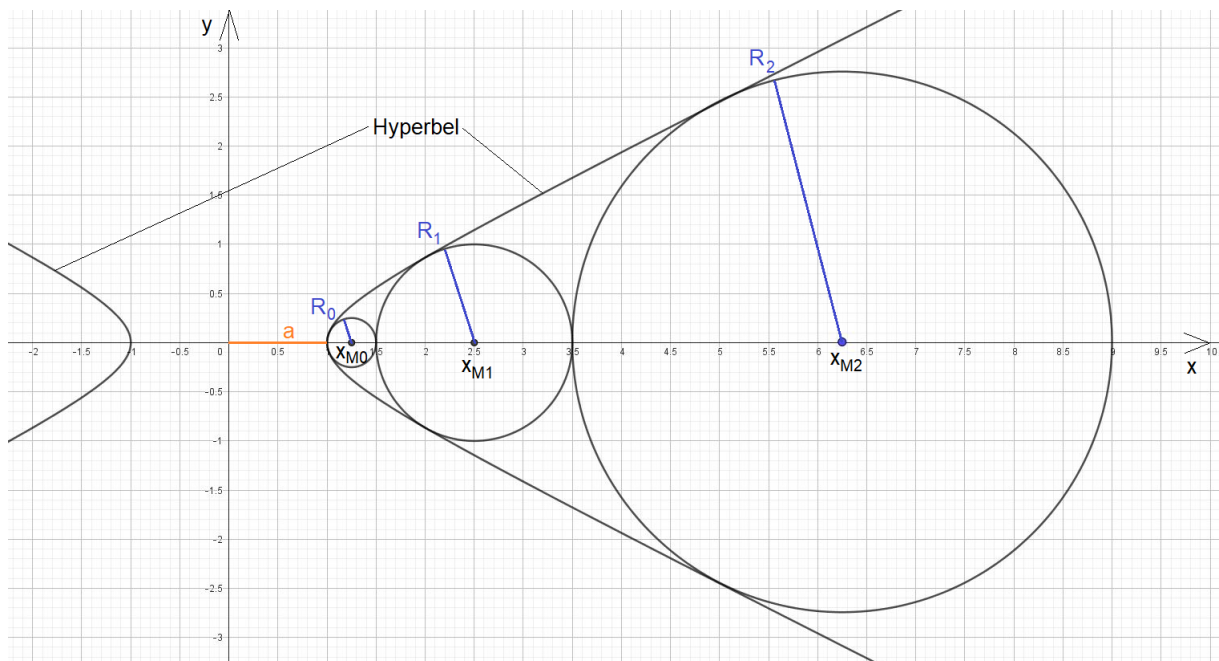
$$R_{13} = b \cdot \cos\left(13 \cdot \arccos\left(\frac{k}{2}\right) - \arccos\left(\frac{R_0}{b}\right)\right)$$

$$R_{13} = 4.4458184 \cdot \cos\left(13 \cdot \arccos\left(\frac{1.95238}{2}\right) - \arccos\left(\frac{1.2}{4.4458184}\right)\right)$$

$$R_{13} = 4.4458184 \cdot \cos(2.84252 - 1.29749) = 4.4458184 \cdot 0.0257634 = 0.1146$$

An dieser Stelle erkennt man nun, dass der letzte Kreisradius kleiner als der minimale Krümmungsradius der Ellipse ist. Das liegt daran, weil der Startradius R_0 größer als $\frac{b^2}{a}$ gewählt wurde. Dadurch wurde der letzte Kreisradius unter die Werteschwelle des minimalen Krümmungsradius der Ellipse geschoben. Insofern müsste dieser Radius genau genommen aus der Betrachtung fallen, womit $N=13$ wäre und somit $R_{12} = 1.076$. D.h., je größer der Startradius R_0 gegenüber $\frac{b^2}{a}$ ausfällt bzw. je näher sich R_0 dem Parameter-Wert b zubewegt, desto mehr Kreise fallen weg, die der Forderung $R_i \geq \frac{b^2}{a}$ nicht mehr genügen.

2) Tangierende Kreise an einer Hyperbel



Gleichung einer Hyperbel mit den Parametern a und b:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Für weitere Betrachtungen soll nur der rechte Hyperbel-Ast zur Anwendung kommen. Das hat den Vorteil, dass sämtliche X_{Mi} -Werte der Kreismittelpunkte positiv ausfallen und größer als der Parameter a sind, womit keine zusätzlichen Fallunterscheidungen zu berücksichtigen sind.

Im Grunde könnte man jetzt die Herleitungen analog wie bei der Ellipse anführen. Doch man kann sich den Aufwand sehr vereinfachen, wenn man sich die Hyperbel-Gleichung genauer anschaut und sich in Erinnerung ruft, dass Ellipse, Parabel und Hyperbel zu den Kegelschnitten gehören. D.h., die Parameter-Eigenschaften, die bei der Ellipse durch a und b beschrieben wurden, entscheiden auch darüber, wann eine Ellipsen-Kurve in eine Hyperbel-Kurve übergeht. Die Gegenüberstellung der Gleichungen für die Ellipse und der Hyperbel legen offen, in welcher Weise der Parameter b zu manipulieren ist, damit eine Transformation von der Ellipse zur Hyperbel gelingt.

Gleichung einer Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Gleichung einer Hyperbel

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{-b^2} = 1$$

Der wesentliche Unterschied liegt darin begründet, dass der Parameter b der Ellipse (reelle Zahl) durch einen Wert mit imaginärer Einheit i (komplexe Zahl) ersetzt wird. Der Parameter b wird durch $i \cdot b$ substituiert, womit die Ellipsen-Gleichung direkt in die Hyperbel-Gleichung übergeht. Diese Art der Substitution kann auch bei den meisten hergeleiteten Gleichungen durchgeführt werden, womit sich dann die Berechnungsvorschriften bzgl. einer Hyperbel ergeben.

Die Mittelpunktgleichung für einen tangierenden Kreis mit Radius R_0 in einer Hyperbel ergibt sich mit:

$$x_{M0} = + \sqrt{(a^2 - (-b^2)) \cdot \left(1 - \frac{R_0^2}{-b^2}\right)}$$

$$x_{M0} = + \sqrt{(a^2 + b^2) \cdot \left(1 + \frac{R_0^2}{b^2}\right)}$$

Betrachtet man nun den speziellen Fall, dass der Kreis die Hyperbel im Punkt $(+ a ; 0)$ berühren soll, dann gilt:

$$x_{M01;2} = (a + R_0)$$

Setzt man das in die Lösung der quadratischen Gleichung ein, erhält man nach dem Quadrieren der Ausdrücke:

$$(a + R_0)^2 = (a^2 + b^2) \cdot \left(1 + \frac{R_0^2}{b^2}\right)$$

$$a^2 + 2aR_0 + R_0^2 = a^2 + b^2 + R_0^2 \cdot \frac{a^2}{b^2} + R_0^2$$

$$R_0^2 \cdot \frac{a^2}{b^2} - 2aR_0 + b^2 = 0$$

$$R_0^2 - 2R_0 \cdot \frac{b^2}{a} + \frac{b^4}{a^2} = 0$$

Der Startradius berechnet sich dann wieder wie bei der Ellipse mit derselben Formel:

$$R_{01;2} = \frac{b^2}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{b^2}{a}\right)^2 - \frac{b^4}{a^2}} = \frac{b^2}{a} \quad \rightarrow \quad R_{01;2} = \frac{b^2}{a}$$

Hiermit bestätigt sich erneut, dass an diesem Kreismittelpunkt ($x_{M01;2} = (a + R_0)$) erwartungsgemäß der minimale Krümmungsradius der Hyperbel vorliegen muss.

Die Radien-Relation R_1 zu R_0 kann ebenfalls durch die Substitution direkt aus der Ellipsen-Herleitung angegeben werden.

$$R_1 = R_0 \cdot \left(1 - \frac{2(-b^2)}{a^2}\right) + \frac{2i \cdot b}{a^2} \sqrt{(a^2 - (-b^2)) \cdot (-b^2 - R_0^2)}$$

$$R_1 = R_0 \cdot \left(1 + \frac{2b^2}{a^2}\right) + \frac{2b}{a^2} \sqrt{(a^2 + b^2) \cdot (b^2 + R_0^2)}$$

Allgemein gilt dann analog für diverse Radien-Relationen:

$$R_{i+1} = R_i \cdot \left(1 + \frac{2b^2}{a^2}\right) + \frac{2b}{a^2} \sqrt{(a^2 + b^2) \cdot (b^2 + R_i^2)}$$

$$R_{i-1} = R_i \cdot \left(1 + \frac{2b^2}{a^2}\right) - \frac{2b}{a^2} \sqrt{(a^2 + b^2) \cdot (b^2 + R_i^2)}$$

Damit ergibt die Summe von

$$R_{i+1} + R_{i-1} = R_i \cdot 2 \left(1 + \frac{2b^2}{a^2}\right)$$

und damit erhält man die rekursive Schreibweise für: (wenn $i = 1; 2; 3; \dots$)

$$R_{i+1} = R_i \cdot 2 \left(1 + \frac{2b^2}{a^2}\right) - R_{i-1}$$

$$R_{i+1} = R_i \cdot k - R_{i-1}$$

$$k = 2 \left(1 + \frac{2b^2}{a^2}\right)$$

Es handelt sich wieder um eine Rekursionsformel (Chebyshev-Polynome erster Art), jedoch mit dem Unterschied, dass der Parameter k bzgl. der Hyperbel ein anderes Intervall aufweist.

$$1 < \frac{k}{2} \quad (\text{Intervall der Hyperbel})$$

Im nächsten Schritt soll nun die Transformation der expliziten Gleichung zur Berechnung der Kreisradien geschehen. Die Ausgangsgleichung bzgl. der Ellipse lautete:

$$R_n = b \cdot \cos \left(n \cdot \arccos \left(\frac{k}{2} \right) - \arccos \left(\frac{R_0}{b} \right) \right) = b \cdot \cos \left(2n \cdot \arcsin \left(\frac{b}{a} \right) - \arccos \left(\frac{R_0}{b} \right) \right)$$

Die Substitution des Parameters b durch $i \cdot b$ liefert dann die Gleichung:

$$R_n = i \cdot b \cdot \cos \left(2n \cdot \arcsin \left(\frac{i \cdot b}{a} \right) - \arccos \left(\frac{R_0}{i \cdot b} \right) \right)$$

An dieser Stelle müssen wir jedoch aufpassen, weil die Herleitungen bzgl. der Ellipse für Startkreise zuträfen, deren Mittelpunkte sich links vom Koordinaten-Ursprung befanden. Bei der neuen Hyperbel-Betrachtung liegen jedoch die Kreise am rechten Ast der Hyperbel an, also rechts vom Koordinaten-Ursprung! Insofern muss das Vorzeichen für den Winkel φ wechseln!

$$\varphi = -\arccos \left(\frac{R_0}{b} \right) \quad \text{bei Ellipse}$$

$$\varphi = +\arccos \left(\frac{R_0}{b} \right) \quad \text{bei Hyperbel}$$

Die transformierte Gleichung bezogen auf die Hyperbel lautet somit:

$$R_n = i \cdot b \cdot \cos \left(2n \cdot \arcsin \left(\frac{i \cdot b}{a} \right) + \arccos \left(\frac{R_0}{i \cdot b} \right) \right)$$

Die imaginären Einheiten lassen sich schrittweise eliminieren durch weitere Umformungen.

$$R_n = i \cdot b \cdot \cos \left(2n \cdot \arcsin \left(\frac{i \cdot b}{a} \right) + \arccos \left(\frac{R_0}{i \cdot b} \right) \right)$$

$$R_n = i \cdot b \cdot \cos \left(2n \cdot \arcsin \left(\frac{i \cdot b}{a} \right) + \frac{\pi}{2} + i \cdot \operatorname{arsinh} \left(\frac{R_0}{b} \right) \right)$$

$$R_n = -i \cdot b \cdot \sin \left(2n \cdot \arcsin \left(\frac{i \cdot b}{a} \right) + i \cdot \operatorname{arsinh} \left(\frac{R_0}{b} \right) \right)$$

$$R_n = -i \cdot b \cdot \sin \left(2n \cdot i \cdot \operatorname{arsinh} \left(\frac{b}{a} \right) + i \cdot \operatorname{arsinh} \left(\frac{R_0}{b} \right) \right)$$

$$R_n = -i^2 \cdot b \cdot \sinh \left(2n \cdot \operatorname{arsinh} \left(\frac{b}{a} \right) + \operatorname{arsinh} \left(\frac{R_0}{b} \right) \right)$$

$$R_n = b \cdot \sinh \left(2n \cdot \operatorname{arsinh} \left(\frac{b}{a} \right) + \operatorname{arsinh} \left(\frac{R_0}{b} \right) \right)$$

Das wäre somit die explizite Berechnungsvorschrift für die Bestimmung der tangierenden Kreisradien an einer Hyperbel.

Eine Aussage über die Kreisradien an einer Hyperbel kann schon vorab getroffen werden. Da sich die Hyperbel im Unendlichen asymptotisch zweier Geraden nähert, die sich im Ursprung kreuzen, müssten die Kreisradien im Unendlichen sich nahezu proportional wie die x_{Mi} -Werte der Kreismittelpunkte verhalten.

$$R_i \sim x_{Mi} \quad , \text{ wenn } i \rightarrow \infty$$

Berechnungsbeispiel (1): Hyperbel mit vorgegebenem Radius R_0 und den Parametern a und b

Es sei:

$$R_0 = 0.25 \quad a = 1 \quad b = 0.5$$

Berechnung des Parameters k :

$$k = 2 \left(1 + \frac{2b^2}{a^2} \right) = 2 \left(1 + \frac{0.5}{1} \right) = 3$$

Berechnung der weiteren Kreisradien:

$$R_n = b \cdot \sinh \left(2n \cdot \operatorname{arsinh} \left(\frac{b}{a} \right) + \operatorname{arsinh} \left(\frac{R_0}{b} \right) \right)$$

$$R_1 = b \cdot \sinh \left(2 \cdot \operatorname{arsinh} \left(\frac{b}{a} \right) + \operatorname{arsinh} \left(\frac{R_0}{b} \right) \right)$$

$$R_1 = 0.5 \cdot \sinh \left(2 \cdot \operatorname{arsinh} \left(\frac{0.5}{1} \right) + \operatorname{arsinh} \left(\frac{0.25}{0.5} \right) \right) = \frac{4}{4} = 1$$

$$R_2 = 0.5 \cdot \sinh \left(4 \cdot \operatorname{arsinh} \left(\frac{0.5}{1} \right) + \operatorname{arsinh} \left(\frac{0.25}{0.5} \right) \right) = \frac{11}{4} = 2.75$$

$$R_3 = 0.5 \cdot \sinh \left(6 \cdot \operatorname{arsinh} \left(\frac{0.5}{1} \right) + \operatorname{arsinh} \left(\frac{0.25}{0.5} \right) \right) = \frac{29}{4} = 7.25$$

$$R_4 = 0.5 \cdot \sinh \left(8 \cdot \operatorname{arsinh} \left(\frac{0.5}{1} \right) + \operatorname{arsinh} \left(\frac{0.25}{0.5} \right) \right) = \frac{76}{4} = 19$$

Sieht man sich die Folge der Kreisradien genauer an, so fällt auf, dass diese auch über jedes zweite Glied der sogenannten Lucas-Folge berechnet werden können.

Lucas-Folge: 2 / 1 / 3 / 4 / 7 / 11 / 18 / 29 / 47 / 76 / 123 / 199 / ...

$$R_n = \frac{1}{4} \cdot L_{2n}$$

Die Berechnung der Kreismittelpunkte zeigt uns dann, wie sich x_{Mi}/R_i verhält, wenn i gegen Unendlich läuft.

$$x_{Mi} = + \sqrt{(a^2 + b^2) \cdot \left(1 + \frac{R_i^2}{b^2} \right)} \quad x_{Mi} \rightarrow R_i \sqrt{a^2 + b^2} \quad , \text{ wenn } i \rightarrow \infty$$

Berechnungsbeispiel (2): Hyperbel mit vorgegebenen Radien R_0 , R_1 und R_2

Es sei:

$$R_0 = 1 \quad R_1 = 3 \quad R_2 = 8$$

Zu beachten ist, dass abschließend zwei Prüfungen erfolgen sollten:

- a) der Parameter k muss sich in dem Intervall $2 < k$ befinden!
- b) R_0 muss mindestens dem minimalen Krümmungsradius der Hyperbel entsprechen:

$$R_0 \geq \frac{b^2}{a}$$

Berechnung des Parameters k aus der Rekursionsformel:

$$R_2 = R_1 \cdot k - R_0 \quad \rightarrow \quad k = \frac{R_0 + R_2}{R_1}$$

$$k = \frac{1 + 8}{3} = 3$$

Der Parameter befindet sich somit im geforderten Intervall. Außerdem ist:

$$k = 2 \left(1 + \frac{2b^2}{a^2} \right) \quad \rightarrow \quad \frac{k}{2} = 1 + \frac{2b^2}{a^2} \quad \rightarrow \quad a^2 = \frac{2b^2}{\frac{k}{2} - 1}$$

Der Radius R_1 lässt sich über R_0 berechnen:

$$R_1 = R_0 \cdot \left(1 + \frac{2b^2}{a^2} \right) + \frac{2b}{a^2} \sqrt{(a^2 + b^2) \cdot (b^2 + R_0^2)}$$

$$R_1 = R_0 \cdot \frac{k}{2} + \left(\frac{k}{2} - 1 \right) \sqrt{(a^2 + b^2) \cdot \left(1 + \frac{R_0^2}{b^2} \right)}$$

$$\left(R_1 - R_0 \cdot \frac{k}{2} \right)^2 = \left(\frac{k}{2} - 1 \right)^2 \cdot (a^2 + b^2) \cdot \left(1 + \frac{R_0^2}{b^2} \right) = \left(\frac{k}{2} - 1 \right)^2 \cdot \left(\frac{2b^2}{\frac{k}{2} - 1} + b^2 \right) \cdot \left(1 + \frac{R_0^2}{b^2} \right)$$

$$\left(R_1 - R_0 \cdot \frac{k}{2} \right)^2 = \left(\frac{k}{2} - 1 \right) \cdot \left(\frac{k}{2} + 1 \right) \cdot (b^2 + R_0^2)$$

$$\rightarrow b = \sqrt{\frac{\left(R_1 - R_0 \cdot \frac{k}{2} \right)^2}{\frac{k^2}{4} - 1} - R_0^2} = \sqrt{\frac{R_1^2 - R_0 \cdot R_1 \cdot k + R_0^2}{\frac{k^2}{4} - 1}}$$

$$\rightarrow b = \sqrt{\frac{4}{5}} = 0.894427 \dots$$

Mit der Berechnung des Hyperbelparameters b folgt dann sofort auch a .

$$a = b \cdot \sqrt{\frac{2}{k-1}} = 2b = 1.788854 \dots \quad \frac{b}{a} = \frac{1}{2}$$

Damit kann die Prüfung bzgl. des minimalen Krümmungsradius der Hyperbel erfolgen:

$$R_0 \geq \frac{b^2}{a} = 0.447 \dots$$

Die nachfolgenden Kreisradien können dann auch über die Rekursionsformel berechnet werden:

$$R_{i+1} = R_i \cdot k - R_{i-1}$$

$$R_3 = R_2 \cdot 3 - R_1 = 8 \cdot 3 - 3 = 21$$

$$R_4 = R_3 \cdot 3 - R_2 = 21 \cdot 3 - 8 = 55$$

$$R_5 = R_4 \cdot 3 - R_3 = 55 \cdot 3 - 21 = 144$$

$$R_6 = R_5 \cdot 3 - R_4 = 144 \cdot 3 - 55 = 377$$

Auch hier fällt sofort auf, dass diese Folge jedem zweiten Glied der sogenannten Fibonacci-Folge entspricht.

Fibonacci-Folge: 1 / 1 / 2 / 3 / 5 / 8 / 13 / 21 / 34 / 55 / 89 / 144 / 233 / 377 / ...

$$R_n = f_{2n}$$

Selbstverständlich können die Radien auch über die explizite Berechnungsvorschrift bestimmt werden.

$$R_n = b \cdot \sinh \left(2n \cdot \operatorname{arsinh} \left(\frac{b}{a} \right) + \operatorname{arsinh} \left(\frac{R_0}{b} \right) \right)$$

$$R_3 = b \cdot \sinh \left(2 \cdot 3 \cdot \operatorname{arsinh} \left(\frac{b}{a} \right) + \operatorname{arsinh} \left(\frac{R_0}{b} \right) \right)$$

$$R_3 = \sqrt{\frac{4}{5}} \cdot \sinh \left(2 \cdot 3 \cdot \operatorname{arsinh} \left(\frac{1}{2} \right) + \operatorname{arsinh} \left(\sqrt{\frac{5}{4}} \right) \right) = 21$$

$$R_4 = \sqrt{\frac{4}{5}} \cdot \sinh \left(2 \cdot 4 \cdot \operatorname{arsinh} \left(\frac{1}{2} \right) + \operatorname{arsinh} \left(\sqrt{\frac{5}{4}} \right) \right) = 55$$

$$R_5 = \sqrt{\frac{4}{5}} \cdot \sinh \left(2 \cdot 5 \cdot \operatorname{arsinh} \left(\frac{1}{2} \right) + \operatorname{arsinh} \left(\sqrt{\frac{5}{4}} \right) \right) = 144$$

Berechnungsbeispiel (3): Vorgegeben sind die Radien R_0 , R_1 und der Parameter k

Es sei:

$$R_0 = 1 \quad R_1 = 2 \quad k = 2.5$$

Mit der rekursiven Berechnungsmethode können die folgenden Radien schnell berechnet werden.

$$R_{i+1} = R_i \cdot k - R_{i-1}$$

$$R_2 = R_1 \cdot 2.5 - R_0 = 2 \cdot 2.5 - 1 = 4$$

$$R_3 = R_2 \cdot 2.5 - R_1 = 4 \cdot 2.5 - 2 = 8$$

$$R_4 = R_3 \cdot 2.5 - R_2 = 8 \cdot 2.5 - 4 = 16$$

$$R_5 = R_4 \cdot 2.5 - R_3 = 16 \cdot 2.5 - 8 = 32$$

Wie sich zeigt, verdoppeln sich die Radien mit jedem Schritt. Es gilt somit:

$$R_n = 2^n$$

Widmet man sich nun aber der Berechnung der Parameter a und b , dann gibt es eine Überraschung.

$$b = \sqrt{\frac{R_1^2 - R_0 \cdot R_1 \cdot k + R_0^2}{\frac{k^2}{4} - 1}} = 0$$

Wir haben es also nicht mehr um eine Hyperbel zu tun, sondern um einen „ausgearteten Kegelschnitt“! Die Kreisradien werden durch ein Geradenpaar tangiert, die sich im Ursprung schneiden. Eigentlich kann man davon sprechen, dass sich die Hyperbel ihrer beiden Asymptoten angenähert hat. Die Asymptoten-Gleichung erhält man durch die einfache Überlegung, wenn für x ein unendlich großer Wert eingesetzt wird.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} \approx \frac{y^2}{b^2} \quad , \text{wenn } x \text{ sehr groß ist}$$

$$\rightarrow \quad \frac{b}{a} = \frac{y}{x} \quad \text{Asymptoten - Gleichung, wobei dann} \quad \frac{b}{a} = \sqrt{\frac{\frac{k}{2} - 1}{2}}$$

In unserem Fall berechnen sich die beiden Geraden durch:

$$\frac{y}{x} = \pm \sqrt{\frac{\frac{k}{2} - 1}{2}} = \pm \sqrt{\frac{\frac{2.5}{2} - 1}{2}} = \pm \sqrt{\frac{1}{8}} = 0.35355 \dots \quad \rightarrow \quad y = x \cdot \pm \sqrt{\frac{1}{8}}$$

Kreisradien lassen sich generell zwischen einem Geradenpaar tangential anordnen, sofern der Parameter $b = 0$ ist. Die Kreisradien wachsen dabei, wie im gezeigten Beispiel, exponentiell an. Im Beispiel waren es Zweier-Potenzen gewesen, mit der die Radien beschrieben werden konnten. Das funktioniert aber auch für Potenzen mit anderer Basis q und der Form:

$$R_n = q^n$$

Die Basis errechnet sich dabei aus dem Verhältnis der ersten beiden Startradien.

$$q = \frac{R_1}{R_0} \quad \text{wobei} \quad R_0 < R_1$$

Und da $b = 0$ sein muss, kann darüber der Parameter k berechnet werden.

$$b = 0 = \sqrt{\frac{R_1^2 - R_0 \cdot R_1 \cdot k + R_0^2}{\frac{k^2}{4} - 1}}$$

$$\rightarrow R_1^2 - R_0 \cdot R_1 \cdot k + R_0^2 = 0$$

$$\rightarrow k = \frac{R_1}{R_0} + \frac{R_0}{R_1} = q + \frac{1}{q}$$

Die Gleichung für die tangierenden Geraden lautet dann:

$$\frac{y}{x} = \pm \sqrt{\frac{\frac{k}{2} - 1}{2}} = \pm \sqrt{\frac{\frac{q^2 + 1}{2q} - \frac{2q}{2q}}{2}} = \pm \sqrt{\frac{(q - 1)^2}{4q}} = (q - 1) \sqrt{\frac{1}{q}}$$

$$\rightarrow y = x \cdot \pm (q - 1) \sqrt{\frac{1}{q}}$$

Für verschiedene Startradien ergibt das:

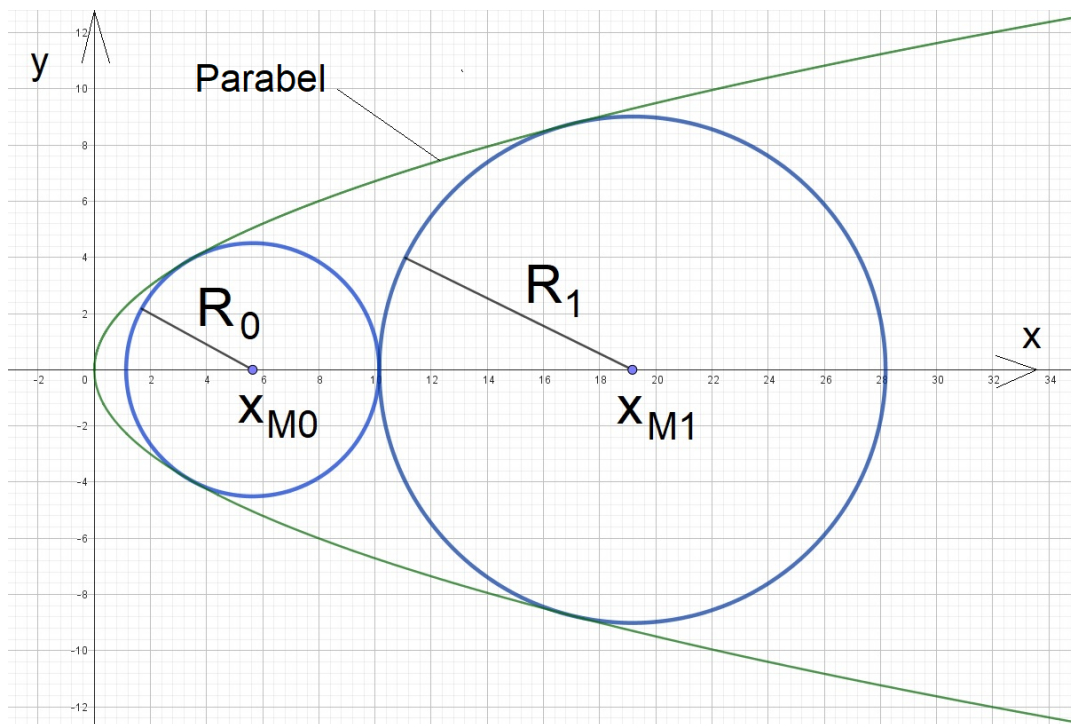
$$R_0 = 1 \quad R_1 = 2 \quad k = 2 + \frac{1}{2} = 2.5 \quad \rightarrow \quad R_n = 2^n$$

$$R_0 = 1 \quad R_1 = 3 \quad k = 3 + \frac{1}{3} = 3.\overline{33} \quad \rightarrow \quad R_n = 3^n$$

$$R_0 = 1 \quad R_1 = 4 \quad k = 4 + \frac{1}{4} = 4.25 \quad \rightarrow \quad R_n = 4^n$$

$$R_0 = 1 \quad R_1 = 5 \quad k = 5 + \frac{1}{5} = 5.2 \quad \rightarrow \quad R_n = 5^n$$

3) Tangierende Kreise an einer Parabel



Gleichung einer Parabel mit dem Parametern c :

$$y = \pm c \cdot \sqrt{x} \quad \text{wobei } c = \sqrt{\frac{1}{a}} \text{ bezogen auf den Kegelschnitt – Parameter } a \text{ ist}$$

$$y^2 = c^2 \cdot x$$

Die Parabel ist im Rahmen der Kegelschnitt-Betrachtungen ein Sonderfall, der genau beim Übergang von der Ellipse zur Hyperbel vorliegt. Insofern leiten wir an dieser Stelle die Berechnung zur Radien-Bestimmung noch einmal an der speziellen Parabel-Gleichung her.

Gleichung eines Kreises mit Radius R_0 mit Mittelpunkt x_{M0} :

$$(x - x_{M0})^2 + y^2 = R_0^2 \quad \text{mit} \quad y^2 = c^2 \cdot x$$

$$(x - x_{M0})^2 + c^2 \cdot x = R_0^2$$

$$x^2 - x \cdot (2x_{M0} - c^2) - (R_0^2 - x_{M0}) = 0$$

$$\rightarrow x_{1;2} = \frac{2x_{M0} - c^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2x_{M0} - c^2}{2}\right)^2 + R_0^2 - x_{M0}}$$

Um eine eindeutige Lösung für x zu bekommen, muss die Diskriminante wieder zu Null gesetzt werden.

$$\rightarrow \left(\frac{2x_{M0} - c^2}{2} \right)^2 + R_0^2 - x_{M0} = 0$$

$$\rightarrow x_{M0} = \frac{c^2}{4} + \frac{R_0^2}{c^2}$$

Für positive x -Werte gilt dann:

$$x \geq 0 \quad \rightarrow \quad x_{M0} - \frac{c^2}{2} \geq 0$$

und damit ergibt sich die Forderung:

$$\frac{c^2}{4} + \frac{R_0^2}{c^2} - \frac{c^2}{2} \geq 0$$

$$R_0^2 \geq \frac{c^4}{4} \quad \text{bzw.} \quad R_0 \geq \frac{c^2}{2}$$

Der Startradius R_0 darf an der tangierenden Stelle $x = 0$ bzw. beim Kreismittelpunkt-Abstand $x_{M0} = \frac{c^2}{2}$ nicht kleiner als der minimale Krümmungsradius der Parabel ausfallen.

Für die nachfolgenden Kreise an der Parabel gilt dann:

$$x_{Mi} = \frac{c^2}{4} + \frac{R_i^2}{c^2}$$

$$x_{M0} = \frac{c^2}{4} + \frac{R_0^2}{c^2} \quad \text{sowie} \quad x_{M1} = \frac{c^2}{4} + \frac{R_1^2}{c^2}$$

Es muss aber auch gelten:

$$x_{M1} - x_{M0} = R_0 + R_1$$

$$\left(\frac{c^2}{4} + \frac{R_1^2}{c^2} \right) - \left(\frac{c^2}{4} + \frac{R_0^2}{c^2} \right) = R_0 + R_1$$

$$R_1^2 - R_0^2 = c^2 \cdot (R_0 + R_1)$$

$$(R_1 + R_0) \cdot (R_1 - R_0) = c^2 \cdot (R_0 + R_1)$$

$$R_1 = c^2 + R_0$$

Die Radien-Verhältnisse zweier sich berührender Kreise errechnen sich somit über:

$$R_{i+1} = c^2 + R_i \quad \text{bzw.} \quad R_{i-1} = -c^2 + R_i$$

Damit ergibt die Summe von

$$R_{i+1} + R_{i-1} = R_i \cdot 2$$

und somit erhält man die rekursive Schreibweise für: (wenn $i = 1; 2; 3; \dots$)

$$R_{i+1} = R_i \cdot 2 - R_{i-1}$$

$$R_{i+1} = R_i \cdot k - R_{i-1}$$

$$\rightarrow k = 2$$

Es handelt sich wieder um eine Rekursionsformel (Chebyshev-Polynome erster Art), jedoch mit dem Unterschied, dass der Parameter k bzgl. der Parabel genau dem Wert 2 entsprechen muss.

$$k = 2 \quad (\text{im Fall der Parabel})$$

Die nachfolgenden Kreisradien nach R_0 und R_1 können über die rekursive Formel berechnet werden.

$$R_2 = R_1 \cdot k - R_0 = (c^2 + R_0) \cdot 2 - R_0 = 2c^2 + R_0$$

$$R_3 = R_2 \cdot k - R_1 = (2c^2 + R_0) \cdot 2 - (c^2 + R_0) = 3c^2 + R_0$$

$$R_4 = R_3 \cdot k - R_2 = (3c^2 + R_0) \cdot 2 - (2c^2 + R_0) = 4c^2 + R_0$$

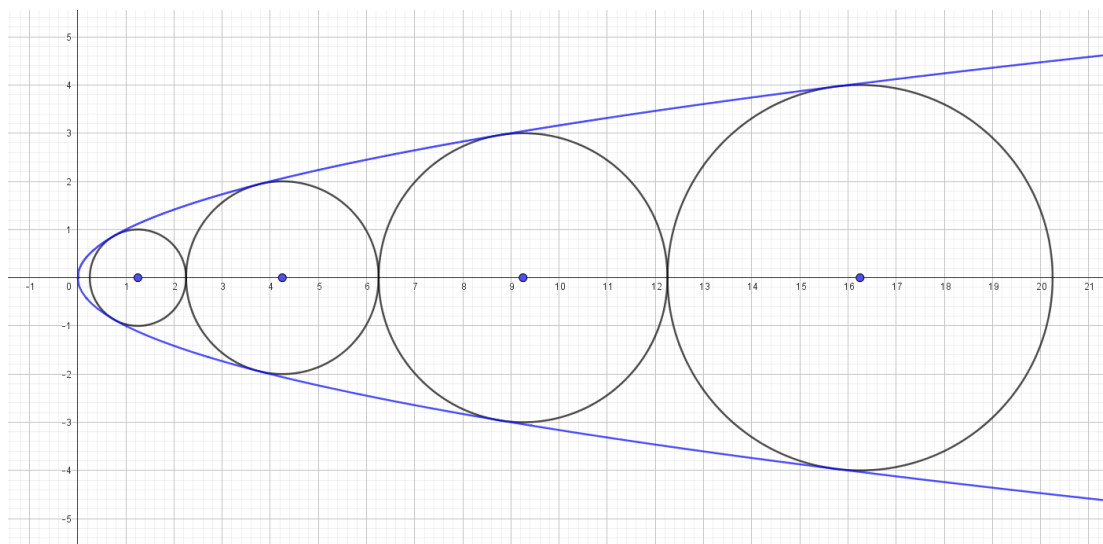
...

$$R_n = nc^2 + R_0$$

Wählt man beispielsweise für $R_0 = 1$ und für den Parameter $c = 1$, dann resultieren die nachfolgenden Kreisradien mit den Werten:

$$R_1 = 2 \quad R_2 = 3 \quad R_3 = 4 \quad R_4 = 5$$

$$R_n = n + 1$$



4) Radien-Relationen diverser Kreise zueinander

Anhand des Problems mit der Ellipse wird im Folgenden hergeleitet, auf welche Weise sich das Verhältnis zweier Kreisradien noch ausdrücken lässt. Dazu wird ein Additionstheorem benötigt, welches auf die explizite Gleichung (zur Bestimmung der tangierenden Kreisradien innerhalb einer Ellipse) angewendet wird.

Additionstheorem:

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2 \cdot \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

Explizite Gleichung zur Berechnung der Radien (Ellipsenproblem):

$$R_n = b \cdot \cos(n \cdot \omega + \varphi)$$

$$R_{n-s} + R_{n+s} = b \cdot \cos((n-s) \cdot \omega + \varphi) + b \cdot \cos((n+s) \cdot \omega + \varphi)$$

$$R_{n-s} + R_{n+s} = b \cdot 2 \cdot \cos(n \cdot \omega + \varphi) \cdot \cos(s \cdot \omega)$$

$$R_{n-s} + R_{n+s} = 2 \cdot R_n \cdot \cos(s \cdot \omega)$$

Das Verhältnis R_n/R_m kann also auch so ausgedrückt werden:

$$\frac{R_n}{R_m} = \frac{R_{n-s} + R_{n+s}}{R_{m-s} + R_{m+s}}$$

Im Fall der Ellipse gibt es nur eine begrenzte Anzahl von N Kreisradien, auf die sich diese Relation anwenden lässt.

$$\begin{array}{ll} n-s \geq 0 & \text{und} \quad n+s \leq N-1 \\ m-s \geq 0 & \text{und} \quad m+s \leq N-1 \end{array}$$

Diese Radien-Relation lässt sich aber auch auf die Problemfälle mit der Hyperbel und der Parabel anwenden, womit eine unbegrenzte Anzahl von Kreisradien vorliegt, die zueinander in Beziehung gesetzt werden können.

Zum Beispiel haben wir auf Seite 21 den Fall gehabt, dass die tangierenden Kreisradien in einer Hyperbel durch jedes zweite Glied der Fibonacci-Folge ausgedrückt werden können. Die Radien-Relation bedeutet nun auf die Fibonacci-Folge bezogen, dass dann gelten muss:

$$\frac{f_{2n}}{f_{2m}} = \frac{f_{2n-2s} + f_{2n+2s}}{f_{2m-2s} + f_{2m+2s}}$$

Wählt man beispielsweise $n = 7$ und $m = 12$ bei $s = 3$, dann ergibt die Relation:

$$\frac{f_{14}}{f_{24}} = \frac{f_8 + f_{20}}{f_{18} + f_{30}} \quad \frac{377}{46368} = \frac{21 + 6765}{2584 + 832040} \quad q. e. d$$

Aber auch beim Sonderfall, wenn die Hyperbel bei $b = 0$ in einen „ausgearteten Kegelschnitt“ übergeht (Geradengleichung), funktioniert die Radian-Relation weiterhin. Hier zeigte sich, dass die nachfolgenden Kreisradien exponentiell anwachsen.

Nehmen wir zum Beispiel den folgenden exponentiellen Radian-Anstieg:

$$R_n = q^n$$

$$\frac{R_n}{R_m} = \frac{R_{n-s} + R_{n+s}}{R_{m-s} + R_{m+s}} \quad \frac{q^n}{q^m} = \frac{q^{n-s} + q^{n+s}}{q^{m-s} + q^{m+s}} = \frac{q^n}{q^m} \cdot \frac{(q^{-s} + q^s)}{(q^{-s} + q^s)} \quad q. e. d$$

Mit der hier abgeleiteten Radian-Relation ergibt sich nun auch die Möglichkeit, eine Rekursionsformel zu finden, die drei bekannte Kreisradien voraussetzt, jedoch nicht mehr auf den k -Parameter zurückgreifen zu müssen.

Die Radian-Relation hinsichtlich $n = 1$ und $m = 2$ bei $s = 1$ ergibt:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_0 + R_2}{R_1 + R_3} \quad \rightarrow \quad R_3 = (R_0 + R_2) \cdot \frac{R_2}{R_1} - R_1$$

bzw. lässt sich das auch allgemein ausdrücken mit:

$$R_{n+3} = (R_n + R_{n+2}) \cdot \frac{R_{n+2}}{R_{n+1}} - R_{n+1}$$