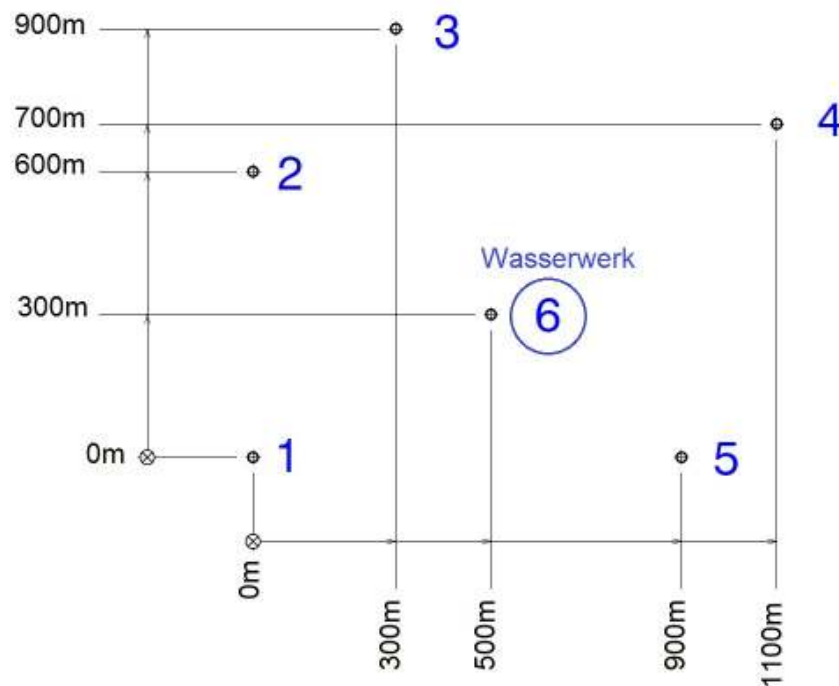


„... Pretty bubbles in the air ...“ #1)

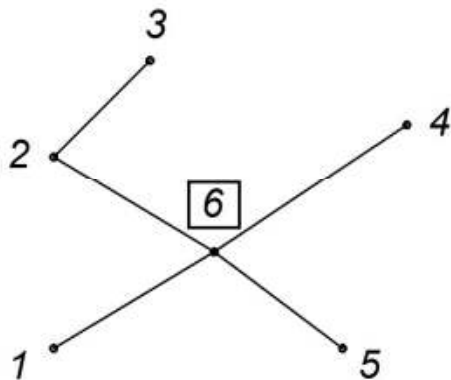
Unsere Geschichte beginnt in einer Stadtverwaltung der Gemeinde von Wabenhausen im idyllisch gelegenen Bienental. Dort beschäftigen sich die beiden Angestellten Herr Storch und Herr Pelikan gerade mit einem eher technischen Problem, nämlich mit der Wasserversorgung innerhalb ihres Distriktes, das rund 1 Quadratkilometer umfasst.

Es sollen von einem zentral gelegenen Wasserwerk aus (6) insgesamt 5 umliegende Ortsteile (1 ... 5) über ein Rohrleitungssystem verbunden werden, wie es die nachstehende Skizze zeigt.



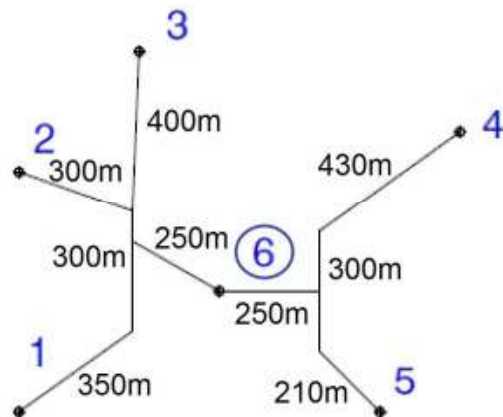
Da in der Umgebung des Wasserwerkes keinerlei Barrieren hinsichtlich der Verlegung des Rohrleitungssystems existieren, können die beiden Angestellten jede Möglichkeit für die Rohrverlegung ausschöpfen. Herr Storch, der einen Hang für eine zentral-bewässerte Versorgung hat, präsentiert seine Lösung mit der Gesamtlänge von ca. 2812 Metern. Dabei wird bei einem Ortspunkt die Wasserleitung hindurchgeleitet zum nächstgelegenen Nachbarort, um Rohrleitungslängen einzusparen. Sein Kollege, Herr Pelikan, ist hingegen mehr ein Fan der glatten Längenmaße und erarbeitet einen Plan mit der Gesamtlänge von ca. 2790 Meter. Dabei nutzt er die Möglichkeit aus, mehrere Verzweigungspunkte einzuführen, um die Verteilung der verschiedenen Stränge zu strukturieren. Beide Lösungen werden durch die folgenden Skizzen dargestellt.

Lösung Herr Storch



Gesamtlänge = 2812m

Lösung Herr Pelikan



Gesamtlänge = 2790m

Als der Dezernatsleiter Herr Adler ins Büro kommt, um sich die bisher erarbeiteten Lösungen anzuschauen, entwickelt sich folgendes Gespräch ...

Adler:

Ah ja, da sind ja die ersten Ergebnisse. Lassen Sie mich mal schauen. – Wie es scheint, haben wir möglicherweise noch etwas Potenzial was die Einsparung der Leitungslängen betrifft. Zwar ist der Plan von Herrn Storch lobenswert einfach wegen der zentralen Stränge, aber ich habe die vage Vermutung, dass sich mit der Technik von Knotenverzweigungen, so wie sie von Herrn Pelikan exemplarisch gezeigt wird, ein durchaus optimaleres Netz ergründen lässt.

Pelikan:

Glauben Sie wirklich, dass sich der Aufwand rechnen würde, nach weiteren Varianten zu suchen und sie alle durchzuspielen?

Adler:

Sicherlich sollte man nichts unversucht lassen, denn 100 oder 200 Meter einzusparen, das macht schon was aus, bezogen auf die Gesamtlänge. Also schlage ich vor, meine Herren, dass Sie heute mal den ganzen Tag nutzen, um zu einem bestmöglichen Ergebnis zu gelangen.

Storch:

Nur mit unseren abgegriffenen Linealen kommen wir aber nicht sehr...

Adler: (unterbricht)

Da schlage ich vor, unseren Azubi einzuspannen. Wo ist er denn überhaupt, unser Thomas?

Storch:

Macht gerade Pause und pustet sich einen.

Adler:

Wie bitte? – Ach Sie meinen, dass er draußen eine pafft. Dass die Jugend nicht von den Zigaretten lassen kann, ein Jammer ist das.

Storch:

Nein, der pustet Seifenblasen und träumt dann so vor sich hin, während er sein Brot futtert.

Adler:

Dann holen Sie mal den Jungen ganz schnell wieder aus seinen Träumereien zurück und sagen Sie ihm, dass er sofort zwei große Geo-Dreiecke sowie Zirkel und Anspitzer besorgen soll, damit Sie für die Aufgabe gerüstet sind. Morgen Vormittag schaue ich dann noch einmal herein, was sich so ergeben hat ...

Nachdem der Azubi Thomas die Zeichenutensilien besorgt hatte, schritten die beiden Angestellten zur Tat und erarbeiteten eine Lösung nach der anderen, Maßen immer wieder die eingezeichneten Längen nach und mussten schließlich feststellen, dass sie an einer Schwelle angelangt waren, die sie nicht mehr weiter zu verbessern in der Lage waren.

Storch:

Puuuh! Jetzt sitzen wir schon bald fünf Stunden an dem Problem und ich komme nicht weiter runter als bis zu dem Wert 2770 Meter. Das ist doch das reinste Herumtappen im Dunst der Ungewissheit.

Pelikan:

Mir geht es ja genauso. Ich habe eine Lösung mit der Länge 2740 Meter, aber die habe ich vor zwei Stunden schon gefunden. Ich kriege es einfach nicht besser hin.

Storch:

Vielleicht sollten wir es dabei belassen und dein Ergebnis morgen dem Adler vorlegen.

Pelikan:

Einverstanden! – Es sei denn, unser Azubi hat noch einen genialen Einfall, oder sollte ich sagen, einen wegweisenden prophetischen Traum, wie man noch ein paar Meter einsparen kann. – Was meinst du, Thomas, traust du dir das zu, bei diesem Problem das Optimale rauszuschlagen?

Thomas:

Ich? – Nun, ich habe ja alle Ihre Ergebnisse angesehen und zur Kontrolle auch noch einmal nachgemessen. So wie ich das sehe, scheint eine Verbesserung möglich zu sein und ich hätte auch schon eine Idee dazu.

Storch:

Dieser ungläubige Thomas! - Stell' dir das gar nicht so einfach vor. Wir sitzen hier nicht umsonst schon den ganzen Tag dran! Wie immer steckt der Teufel im Detail.

Thomas:

Morgen!

Storch:

Was morgen?

Thomas:

Morgen früh zeige ich Ihnen meine Lösung und ich wette, dass sie besser ausfallen wird als die jetzige. Das mache ich, wenn ich Zuhause bin.

Pelikan:

Dann viel Glück dabei! – Ist ja auch schon Feierabend! - Also dann bis morgen.

Damit verabschiedeten sich die beiden Herren und Thomas in den Feierabend. - Als am nächsten Morgen Herr Adler die beiden Angestellten aufsuchte, kam der Azubi etwas verspätet ins Büro hinzu. Man sah ihm an, dass er etwas übernachtigt war, aber er hatte eine Lösung zu Hand, die er exakt berechnet hatte und die sogar die Länge von 2550 Meter unterbot. Großes Staunen machte sich plötzlich im Büro breit, aber die drei Herren wurden in noch größeres Erstaunen versetzt, als Thomas ihnen schließlich verriet, wie er zu der grandiosen Lösung kam ...

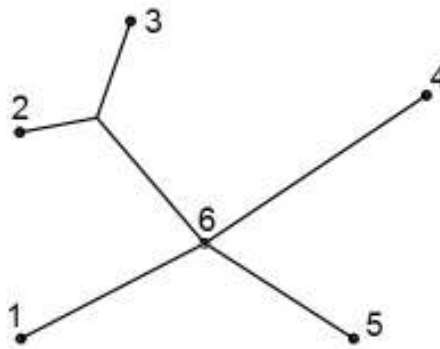
Wer gerne den Fortgang der Geschichte wissen möchte, kann mir eine Nachricht senden (gerne auch mit der exakten Lösung auf 1 Meter genau). Dann sende ich bei nächster Gelegenheit einen Link mit der Auflösung des Rätsels zurück. – Viel Spaß beim Rätseln !!! KUE

Am nächsten Tag im Büro:Adler:

Dann zeigen sie mal, zu welchem Ergebnis sie gestern noch gekommen sind.

Pelikan:

Bitte schön. – Leider haben wir nur eine sehr geringfügige Verbesserung erreichen können. Sehen sie doch, wieviel Papier wir für all die verschiedenen Varianten verbraucht haben.



Gesamtlänge ca. 2740m

Adler:

In der Tat, der ganz große Wurf ist das ja nicht geworden. Immerhin 50 Meter eingespart!

Pelikan:

Es sei denn, unser Azubi, er kommt ja gerade zur Tür herein, hat für uns die versprochene perfekte Antwort herausgefunden. Gestern hat er ja noch große Töne gespuckt. Mal sehen, ob er jetzt Farbe bekennen muss.

Adler:

Du bist heute etwas spät dran, mein Junge. Ist etwas dazwischen gekommen?

Thomas:

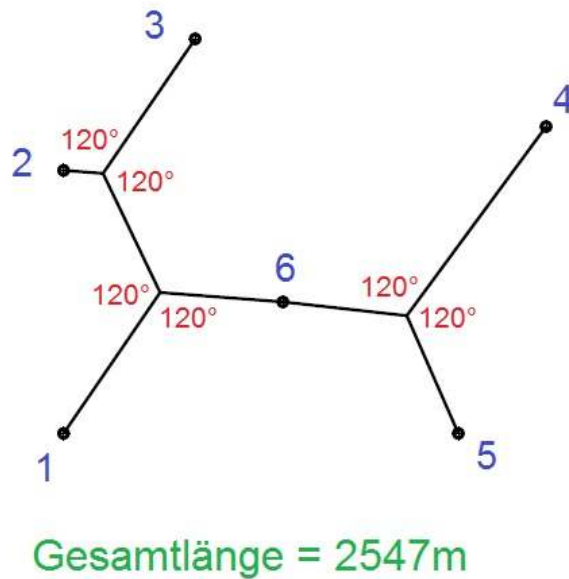
Oh ja, ich habe mich etwas vertan mit der Zeit beim Experimentieren daheim. Mich hat das Problem so gefesselt, dass ich ans Schlafengehen gar nicht mehr gedacht habe. Ich habe leider verschlafen, aber ich habe ein tolles Ergebnis für Sie. - Hier! Ich komme nämlich auf eine minimale Gesamtlänge von 2547 Metern, wenn die Netzanordnung so verläuft.

Storch:

Donnerwetter! Wie hast du das bloß geschafft? Und dabei sieht die Lösung so einfach aus. Ob die wirklich stimmt?

Thomas:

Sie stimmt! Ich habe alle Koordinatenpunkte der Verzweigungen nachgerechnet und daraus die Gesamtlänge errechnet. Sie stimmt auf dem Papier und sie stimmt mit meiner Berechnung überein.



Adler:

Na sag' mal, wie bist du denn darauf gekommen, dass diese 120°-Drittelerung an den Knotenpunkten zu diesem sehr guten Ergebnis führt? Ein Zufall? Eine Eingebung?

Thomas:

Nämlich so, ... (holt sein Pustefix-Röhrchen hervor und bläst ein paar Seifenblasen) ... ist das nicht wunderbar?

Pelikan:

Nun lass mal die Albernheiten! Spielen kannst du, wenn du wieder Zuhause bist, du hoffnungsloser Träumer.

Adler:

Halt, halt! Ich habe da so eine Vermutung. Könnte es sein, dass Thomas uns mit den Seifenblasen den entscheidenden Hinweis gegeben hat?

Thomas:

Genau ins Schwarze getroffen, Herr Adler. Die Seifenhäute können uns nämlich zeigen, welche optimierten Weglängen sich bei dieser Problemstellung einstellen können. Das habe ich alles mal in der Schule gehabt, in der Physik-AG.

Storch:

Da bin ich aber gespannt, denn Seifenblasen sind doch rund, oder besser gesagt gekrümmt. Wie kann man denn so ein Problem mit Seifenblasen überhaupt lösen?

Thomas:

Nicht mit Seifenblasen, sondern mit Seifenhäuten! - Man nimmt einfach zwei handtellergroße Plexiglas-Scheiben, bohrt zwei bis drei Millimeter große Löcher in sie hinein, nämlich dort wo sich die Punkte 1 bis 6 befinden, und verbindet die beiden Scheiben mit Stahlstiften, die man in die Bohrungen einpresst. Zwischen den Scheiben sollte dabei ein Spalt von etwa einem Zentimeter sein.

Adler:

Und lass mich raten. Dann hast du dir eine Seifenlauge gemischt und diese Scheiben dort eingetaucht.

Thomas:

Wieder genau ins Schwarze getroffen, Herr Adler. Denn sobald man die Scheiben wieder aus der Seifenmischung herauszieht, stellen sich diverse Muster zwischen den Stiften ein, die immer geradlinig sind, weil die Seifenhaut stets den geringsten energetischen Spannungszustand eingeht. Wenn man etwas herumprobiert, kommt irgendwann auch das optimale Netzwerk zum Vorschein, und das ist mir gestern gelungen.

Adler:

Ein brillanter Einfall war das. Du bist doch nicht so verträumt, wie man vielleicht denkt. Wozu die Seifenblasen doch gut sind.

Thomas:

Übrigens, die wabenförmigen Verzweigungspunkte, dort wo mit den 120°-Winkeln drei Seifenhäute aufeinander treffen, diese nennen sich auch Steinerpunkte, benannt nach Jakob Steiner, der vor 200 Jahren lebte.

Pelikan:

Und genauso alt sehen wir jetzt aus, da wir nun wissen, dass uns ein Schuljunge regelrecht vorgeführt hat.

Adler:

Ich würde sagen, wir sollten deinen Ideenreichtum damit honorieren, dass du heute ausnahmsweise freinehmen darfst. Du siehst aus, als könntest du eine Mütze Schlaf gut gebrauchen. Also dalli, dalli, ab nach Hause mit dir! Wir müssen das erst einmal verdauen, was du uns gerade beigebracht hast.

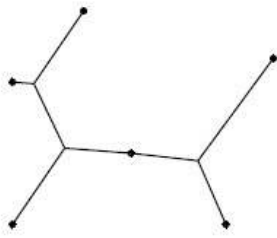
Thomas:

Dann bis morgen!!!

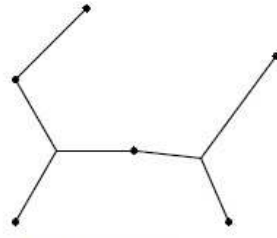
- ENDE -

#1) Anspielung auf die Melodie „I'm Forever Blowing Bubbles“ von John Kelleter

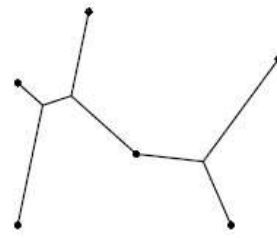
Und hier ein kleines Sortiment an Lösungen, die sich auch mit Seifenhäuten darstellen lassen würden:



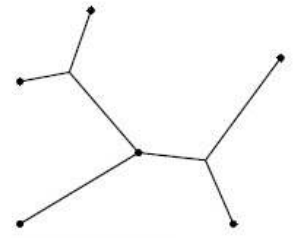
2546,692



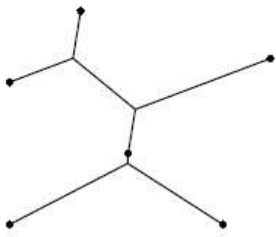
2556,9369



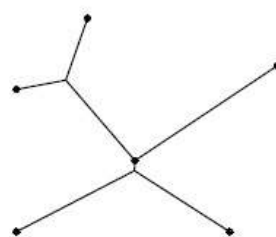
2628,0848



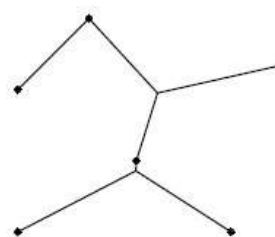
2631,9371



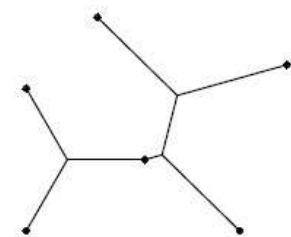
2704,7091



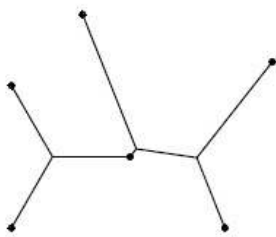
2737,4748



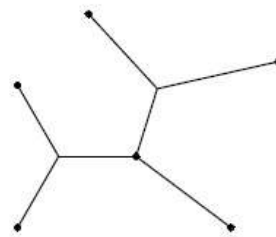
2754,6853



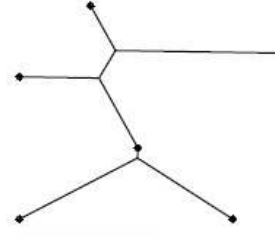
2763,4615



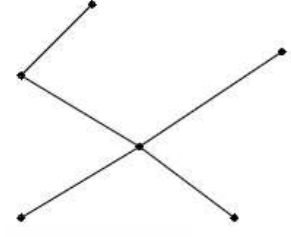
2763,4615



2769,4562



2800,4042



2811,5647

Die Seifenhaut-Lösung:

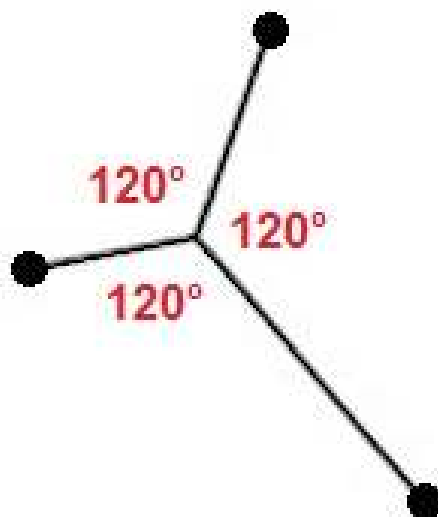


Von der anschaulichen Praxis der Seifenhaut-Analogie hin zur Theorie der Minimalflächen und der Gleichungen für die minimale Oberflächenenergie (Oberflächenspannung)

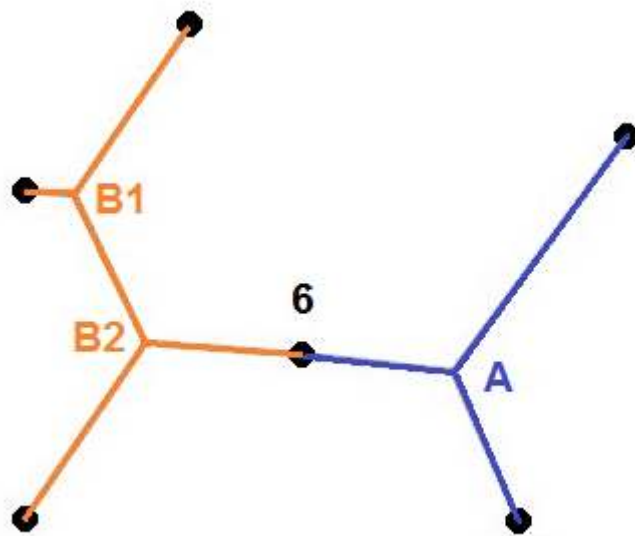
Bei der geschilderten Aufgabenstellung „Suche nach einem Verbindungsnetz mit minimaler Länge“ handelt es sich um ein so genanntes -Steinerbaumproblem-. Da Seifenhäute physikalisch die Eigenschaft besitzen, einen Gleichgewichtszustand anzustreben, bei welchem die minimalste Oberflächenenergie benötigt wird, können diese für die Art von Problemen eingesetzt werden. Aber Vorsicht! Die Seifenhäute bewegen sich nicht zwangsläufig auf den Gleichgewichtszustand der minimalsten Oberflächenenergie zu, sondern zeigen stets eine Lösung mit einem relativen Minimum, also nicht unbedingt die Lösung mit dem absoluten Minimum!

Um das absolute Minimum zu erreichen, muss man manchmal etwas nachhelfen, also den sich formierenden Gleichgewichtszustand etwas stören. Solch eine Störung kann beispielsweise durch sanftes anpusten der Seifenhaut geschehen, aber auch eine veränderte Startbedingung beim Herausziehen der Plexiglas-Scheiben aus der Seifenmischung kann zu unterschiedlichen Ergebnissen führen. Deshalb bedarf es auch etwas an Gespür bei der Suche nach dem absoluten Minimum. Letztendlich muss immer eine abschließende Überprüfung bzw. Nachberechnung erfolgen, welche von den Ergebnissen die Beste ist.

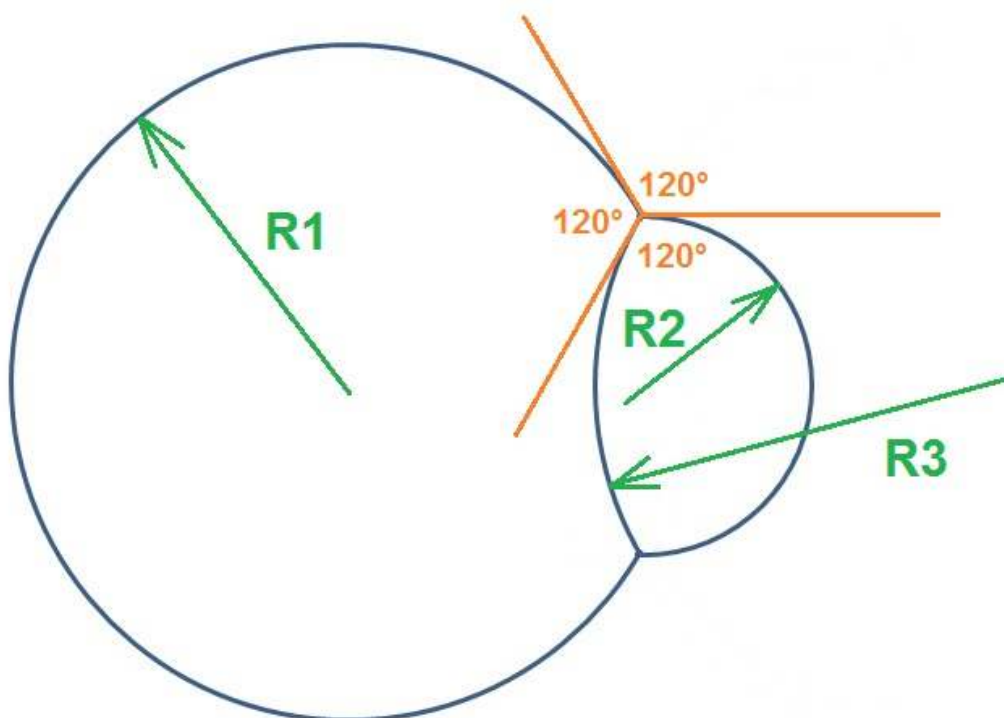
Wie schon in der Geschichte angeklungen ist, stellen wabenförmige Netzkonstellationen mit der 120° -Winkelaufteilung eine sehr günstige Variante dar, die sich aber nicht immer wirklich als beste Lösung herausstellen müssen. Eine Tatsache ist jedoch, dass zwischen 3 Punkten in der Ebene, vorausgesetzt die Innenwinkel des aufgespannten Dreieckes sind kleiner als 120° , sich stets ein „Steinerpunkt“ einstellt, der die Punkte mit einer 120° -Drittelerung verbindet. Diese Minimal-Lösung lässt sich auch geometrisch beweisen. Wenn ein Innenwinkel im Dreieck jedoch größer oder gleich 120° ist, dann fällt der Steinerpunkt mit einem der 3 Punkte zusammen!



Insofern sind solche 120° -Konstellationen „modulhaft“ immer als mögliche Lösungskandidaten zu favorisieren. Bei dem Problem der „Wasserversorgung“ haben wir insgesamt 3 Steinerpunkte bei der Lösung mit der Länge 2547m. Die linke Seite vom Wasserwerk aus gesehen (Punkt 6) hat sogar eine Doppelausführung einer 120° -Drittelerung als Gleichgewichtszustand bereitgestellt (B1+B2), quasi als optimale Teil-Lösung für die betroffenen 4 Punkte (anstatt der 3 Punkte der rechten Seite).



Diese 120° -Winkel treffen wir bei Seifenhäuten aber auch bei Seifenblasen immer wieder an. Um noch ein weiteres Beispiel zu zeigen, so bildet sich ein 120° -Steinerpunkt aus (Plateau-Kanten sind in diesem Fall die korrektere Bezeichnung), wenn sich zwei Seifenblasen miteinander verbinden. Wenn dies geschieht, dann haben wir es insgesamt mit drei gekrümmten Seifenhäuten zu tun. Erst einmal sind da die beiden Ausgangsseifenblasen mit den Radien R_1 und R_2 , und dann noch die Verbindungsgrenzfläche zwischen den beiden Seifenblasen, welche einen Krümmungsradius R_3 besitzt. Legt man einen Schnitt durch die Symmetrieachse dieses Gebildes, dann erhalten wir folgende Skizze.



An dieser Stelle soll schon mal ein Ausblick auf die „Young-Laplace-Gleichung“ gegeben werden, die allgemein bei Minimalflächen zum Einsatz kommt. Im Fall der Seifenblasen gibt es eine Druckdifferenz Δp zwischen dem Innenvolumen und der Umgebung. Die längenbezogene Oberflächenspannung wird durch den Wert σ ausgedrückt. Bei ρ_1 und ρ_2 handelt sich um die beiden Hautkrümmungsradien an einem bestimmten Punkt der gekrümmten Fläche.

$$\Delta p = \sigma \cdot \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right)$$

Bei einer Seifenblase sind die beiden Krümmungsradien ρ_1 und ρ_2 gleich groß ($= R$), sodass allgemein für Seifenblasen gilt:

$$\Delta p = \frac{2 \cdot \sigma}{R}$$

Bei der Verschmelzung zweier Seifenblasen ergeben sich somit folgende Gleichungen:

$$\Delta p_{10} = \frac{2 \cdot \sigma}{R_1}$$

$$\Delta p_{20} = \frac{2 \cdot \sigma}{R_2}$$

$$\Delta p_{12} = \frac{2 \cdot \sigma}{R_3}$$

Index 10: Seifenblase 1 in Bezug auf die Umgebung „0“

Index 20: Seifenblase 2 in Bezug auf die Umgebung „0“

Index 12: Seifenblase 1 in Bezug auf Seifenblase 2

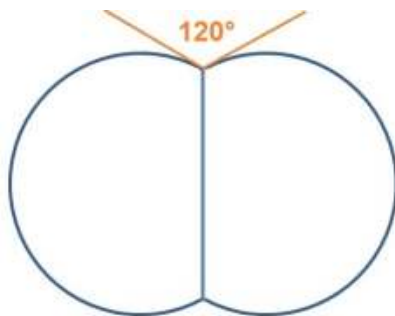
Hinsichtlich der Druckdifferenzen muss gelten:

$$\Delta p_{20} - \Delta p_{10} = \Delta p_{12}$$

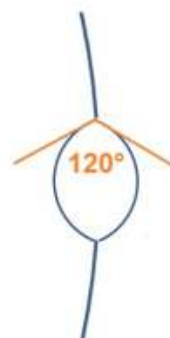
$$\rightarrow \frac{2 \cdot \sigma}{R_2} - \frac{2 \cdot \sigma}{R_1} = \frac{2 \cdot \sigma}{R_3} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_3} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{R_2}$$

Mit dieser Aussage können nun auch Sonderfälle betrachtet werden. Wenn die beiden Seifenblasen gleich groß sind, also $R_1 = R_2$, dann strebt der Radius R_3 gegen unendlich. D.h., die Grenzfläche zwischen beiden Blasen ist eine Ebene ohne Krümmungsradius. Ist dagegen eine der Seifenblasen in Relation zur anderen sehr groß (z.B. $R_1 \gg R_2$), dann folgt:

$$R_2 \approx R_3 \quad \text{falls} \quad R_1 \gg R_2$$

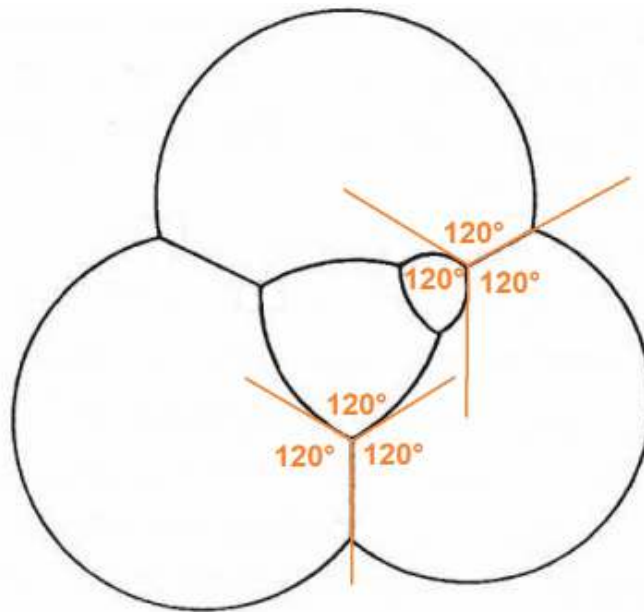


$$R_1 = R_2$$



$$R_1 \gg R_2, R_3 \\ R_2 \approx R_3$$

Die 120° -Tangenten an den Grenzlinien bzw. Plateau-Kanten bilden sich auch, wenn drei Seifenblasenflächen aneinander grenzen. Mit dem folgenden Bild bewegen wir uns somit (als Vorstufe) schon auf die Seifenschäume zu, womit die Praxis-Betrachtung dann auch enden soll.



Das Thema der Minimalflächen bei nicht geschlossenen Flächen (keine Blasen!), das in sehr naher Verwandtschaft zu der Seifenhaut-Thematik steht, wird hier im Anschluss noch theoretisch vertieft angeführt. Da es sich im Folgenden um keine Blasen handelt, spielt die Druckdifferenz Δp bei der Young-Laplace-Gleichung keine Rolle mehr. Das Problem reduziert sich also in der Form, dass sich die beiden Hauptkrümmungsradien an jedem Punkt der Fläche vom Vorzeichen her aufheben müssen.

$$\Delta p = 0 = \sigma \cdot \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) \rightarrow \underline{\underline{0 = \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right)}} \rightarrow \rho_1 = -\rho_2$$

Diese Forderung führt dann zu den typischen sattelförmigen Oberflächen bei den Minimalflächen. Weiteres zu diesem Thema => siehe die Folgeseiten.

1 – Definition einer Minimalfläche

Als rein mathematische Problemstellung besitzt die Minimalfläche die Eigenschaft, dass ausgehend von einer vorliegenden Randkurve (geschlossen in unserem Fall) ein Bereich überspannt wird, welcher eine minimale Oberfläche aufweist.

Die mathematische Lösung zu einer bestimmten Randkurve muss dabei nicht eindeutig sein, da sich theoretisch unterschiedliche Minimalflächen hier einspannen lassen. Der Grund ist, weil die Lösungsmenge zu Minimalflächen von verschiedenen topologischen Typen führt. Das können dann auch Flächen sein, die ein oder mehrere Löcher besitzen, sodass die Minimalfläche beispielsweise Henkelflächen aufweist. Diese Anzahl jener Henkel bestimmt damit das sogenannte Geschlecht der Topologie. Ein Torus hätte somit das Geschlecht $g=1$. In unserem Fall soll eine Oberfläche ohne Loch vorliegen, womit eine Topologie mit Geschlecht $g=0$ als Lösung gefordert wäre.

Notwendige Bedingung einer Minimalfläche: (keine hinreichende Bedingung!!!)

Für eine konform parametrisierte Fläche $X(u,v)$ ist die mittlere Krümmung $H = 0$.

Um die mittlere Krümmung H berechnen zu können, müssen sämtliche Gleichungen aus der ersten und zweiten Gauß'schen Fundamentalform herangezogen werden.

Funktionen aus der „Ersten Gauß'sche Fundamentalform“:

$$E = \left[\frac{\partial X(u,v)}{\partial u} \right]^2 \quad F = \frac{\partial X(u,v)}{\partial u} \cdot \frac{\partial X(u,v)}{\partial v} \quad G = \left[\frac{\partial X(u,v)}{\partial v} \right]^2$$

Funktionen aus der „Zweiten Gauß'sche Fundamentalform“:

$$L = \frac{\partial^2 X(u,v)}{\partial u^2} \cdot \left(\frac{\partial X(u,v)}{\partial u} \times \frac{\partial X(u,v)}{\partial v} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{E \cdot G - F^2}}$$

$$M = \frac{\partial^2 X(u,v)}{\partial u \cdot \partial v} \cdot \left(\frac{\partial X(u,v)}{\partial u} \times \frac{\partial X(u,v)}{\partial v} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{E \cdot G - F^2}}$$

$$N = \frac{\partial^2 X(u,v)}{\partial v^2} \cdot \left(\frac{\partial X(u,v)}{\partial u} \times \frac{\partial X(u,v)}{\partial v} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{E \cdot G - F^2}}$$

Gauß'sche Krümmung K :

$$K = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2} = \frac{L \cdot N - M^2}{E \cdot G - F^2}$$

mittlere Krümmung H :

$$H = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{E \cdot N - 2 \cdot M \cdot F + G \cdot L}{2 \cdot (E \cdot G - F^2)}$$

Hierbei sind R_1 und R_2 die beiden Hauptkrümmungsradien der Fläche am betreffenden Punkt.

Eine weitere vereinfachte Darstellungsform für die Gleichungen der Fundamentalformen ergibt sich, wenn die Parameter u und v durch die Koordinaten x und y ausgedrückt werden und die Fläche X durch einen Radiusvektor r dargestellt wird, der wie folgt beschrieben ist:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{wobei} \quad z = f(x, y)$$

$$E = \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]^2 + 1 \quad F = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \quad G = \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right]^2 + 1$$

$$L = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{E+G-1}} \quad M = \frac{\partial^2 f}{\partial x \cdot \partial y} \cdot \frac{1}{\sqrt{E+G-1}} \quad N = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{E+G-1}}$$

Mit der Forderung, dass die mittlere Krümmung $H=0$ sein soll, muss folgende Gleichung erfüllt sein:

$$H = 0 = E \cdot N - 2 \cdot M \cdot F + G \cdot L \quad \text{sofern} \quad E \cdot G - F^2 > 0 \quad \text{ist.}$$

$E \cdot G - F^2$ ist in diesem Fall die Diskriminante der ersten Fundamentalform, also die Determinante der Darstellungsmatrix g (metrischer Tensor).

$$g = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \quad g \text{ ist somit positiv definit bzw. differentialgeometrisch regulär}$$

Das bedeutet dann auch, dass die beiden Hauptkrümmungsradien der Gauß'schen Krümmung K einen Vorzeichenwechsel vorweisen müssen, damit die mittlere Krümmung H verschwinden kann. Eine negative Gauß'sche Krümmung führt somit auf eine Sattelfläche (hyperbolische Krümmung).

$$H = 0 \quad \Rightarrow \quad L \cdot N - M^2 < 0$$

Eine Minimalfläche muss daher die folgende Differentialgleichung erfüllen:

$$\left(\left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]^2 + 1 \right) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \left(\left[\frac{\partial f}{\partial y} \right]^2 + 1 \right) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2 \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \cdot \partial y} = 0$$

Als Nebenbedingung muss die Funktion $z=f(x,y)$ auch der geschlossenen Randkurve genügen. D.h., die Randkurve ist eine Teilmenge, die auf der Fläche X zu finden sein muss.

Analytische Lösbarkeit der Differentialgleichung einer Minimalfläche:

Im Regelfall werden für beliebige Randkurven keine analytisch berechenbaren Lösungen zu finden sein, da die allgemeine Randkurve (als Funktion beschrieben) zu komplex wäre. Auch wenn die geschlossene Randkurve durchgehend stetig ist und durch eine einzige Funktion beschrieben werden könnte, wäre eine Lösung der DGL nur schwerlich möglich, weil es keine (unkomplizierte) allgemeine Methode dafür gibt.

Es ist eher der umgekehrte Fall von praktischem Nutzen, wenn man auf eine schon gegebene und bekannte Flächenfunktion die obige DGL anwendet, um damit eine Prüfung zu erlangen, ob es sich hierbei qualitativ um eine Minimalfläche handelt.

Es gibt deshalb unter der Thematik „Minimalflächen“ nur wenige gut untersuchte und behandelte Lösungen (wie z.B. die Flächen von Enneper, Scherk, Henneberg etc.). Aus diesem Grunde führt ein rein mathematischer Berechnungsansatz hier kaum zum Ziel. Dieses Ziel ist aber noch auf eine andere Weise verfolgbar, indem man sich ergänzend den Gesetzmäßigkeiten der Physik zuwendet und hierbei die Elastizitätstheorie und Oberflächenenergie zu den Membranen und Seifenhäuten näher betrachtet.

⇒ **Physikalischer Ansatz über die Seifenhaut-Methode (Plateau-Problem)**

2 – Energiebetrachtungen zu den Seifenhäuten / Membranen

Der Physiker Joseph Antoine Ferdinand Plateau (1801-1883) untersuchte experimentell, ob innerhalb einer geschlossenen Drahtkontur stets eine Seifenhaut eingespannt werden kann. In den real untersuchten Fällen wurde dieses immer bestätigt, auch bei kompliziertesten Randkurven des Drahtes.

Zur Lösung und Beweisführung des sogenannten Plateau-Problems bediente man sich dabei der Energiefunktion der Oberfläche, die über das Dirichlet-Integral definiert werden kann. Dieses Funktional ist ebenfalls zu minimieren, sodass die Lösung des Problems wiederum in das mathematische Gebiet der Variationsrechnung hineinführt.

Dirichlet-Integral:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot \int_C |\partial X|^2 du \cdot dv = \frac{1}{2} \cdot \int_C \left(\left[\frac{\partial X(u,v)}{\partial u} \right]^2 + \left[\frac{\partial X(u,v)}{\partial v} \right]^2 \right) du \cdot dv = \frac{1}{2} \cdot \int_C (E + G) du \cdot dv = MIN$$

Wobei die Randkurve C stetig und unendlich oft differenzierbar ist und es sich bei X(u,v) um eine harmonische Funktion handelt, also $\Delta X=0$ ist (Δ ist hierbei der Laplace-Operator)! Die Fläche X muss zudem konform (isotherm) parametrisiert sein, es gilt dann:

$$\frac{\partial X(u,v)}{\partial u} \perp \frac{\partial X(u,v)}{\partial v} \quad \text{und} \quad \left| \frac{\partial X(u,v)}{\partial u} \right| = \left| \frac{\partial X(u,v)}{\partial v} \right|$$

$$\Rightarrow F = \frac{\partial X(u,v)}{\partial u} \cdot \frac{\partial X(u,v)}{\partial v} = 0 \quad \text{und} \quad E = G$$

Für diesen Fall wurde der Beweis geführt, dass $X(u,v)$ dann den Flächeninhalt minimiert. Es wurde also mittels des Dirichletschen Prinzips nachgewiesen, dass eine Fläche X bei einer gegebenen Randkurve C eine kleinste Energie besitzt. Es stellt somit eine Alternative zur Minimierung des Flächenintegrals dar, welches diese Form hätte:

$$A = \int_C \sqrt{E \cdot G - F^2} \, du \cdot dv = MIN \quad \text{bzw. hier dann} \quad A = \int_C \sqrt{E \cdot G} \, du \cdot dv = MIN$$

Der Existenz-Beweis für eine Lösung einer Minimalfläche bei einer gegebenen Randkurve wurde erst in den 1930-er Jahren durch Douglas/Rado erbracht. Eine Seifenhaut gemäß der Beschreibung des Plateau-Problems erfüllt damit die beiden Forderungen:

Laplace-Gleichung:

$$\Delta X = \frac{\partial^2 X(u,v)}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 X(u,v)}{\partial v^2} = 0$$

Minimierung des Energie-Funktional:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \cdot \int_C (E + G) \, du \cdot dv = MIN$$

Die Elastizitätstheorie von Schalen und Membranen betreffend (Seifenhäute fallen darunter) kann man hinsichtlich der Forderung, dass die mittlere Krümmung H die Oberfläche verschwinden muss, auch das Beispiel der Oberflächenspannung bzw. Kapillarspannung anführen. Eine gekrümmte Grenzfläche (z.B. Seifenhaut), deren eine Seite mit dem Druck p_1 und deren andere Seite mit p_2 beansprucht wird, liefert über das geforderte Kräftegleichgewicht die folgende Beziehung:

$$p_2 - p_1 = k \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad \text{wobei } k \text{ (bzw. } \sigma) \text{ die sogenannte Kapillarkonstante darstellt.}$$

Da beim Plateau-Problem auf beiden Seiten derselbe Druck herrscht, muss gelten:

$$p_2 - p_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = 0 \quad \text{also mittlere Krümmung:} \quad H = 0$$

Lässt man im Weiteren den Ansatz zu, dass es sich bei der Oberfläche um eine schwach gekrümmte Fläche handelt, naturgemäß wird die Seifenhaut sich energetisch davor scheuen, unnötige Verkrümmungen durchzuführen, dann erhält man über die Monge-Parametrisierung ebenfalls ähnliche Beziehungen, wie sie oben schon angeführt sind. Man muss hier aber beachten (!), dass die Seifenhautfläche bzgl. einer planaren x - y -Ebene schwach gekrümmt ist (schwache Welligkeit), sodass die ersten Ableitungen über x und y klein sind.

Monge-Parametrisierung:

Die Oberfläche X wird beschrieben über:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{wobei} \quad z = f(x, y).$$

Für eine schwach gekrümmte Fläche gilt hier: $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2, \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \ll 1$

Die Differentialgleichung der Minimalfläche vereinfacht sich dann zu:

$$0 = \left(\left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]^2 + 1 \right) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \left(\left[\frac{\partial f}{\partial y} \right]^2 + 1 \right) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2 \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \cdot \partial y} \approx \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \quad \Rightarrow \Delta f = 0 \quad \text{d.h., die Laplace-Gleichung verschwindet.}$$

Wie man hiermit (vereinfacht) über die Oberflächenspannung und die Monge-Parametrisierung erkennt, ist das Verschwinden der mittleren Krümmung und der Laplace-Gleichung ein Kriterium bei der Suche nach der Minimalfläche. Das Hauptkriterium, die Minimierung der Oberfläche, wird dann alternativ durch Minimierung des Energie-Funktional erfüllt.

Was bedeutet das nun für eine beliebige Randkurve C , die als Ausgangsrandbedingung vorliegt? Für diese Randkurve (geschlossen) müsste erst einmal eine stetige Funktion gefunden werden, die hinzukommend unendlich oft differenzierbar sein müsste. Bei einer komplexen Randkurve in 3 Raumdimensionen wird das eine sehr aufwendige Berechnung, die ansatzweise wahrscheinlich nur über eine Fourier-Analyse zu einem Ziel führt. Damit wäre dann lediglich die Beschreibung der Randkurve gegeben. Die Minimierung einer dann ebenfalls durch irgendwelche Ansatzfunktionen beschriebenen Oberfläche (mit der Bedingung $\Delta X=0$), beispielsweise durch das Ritz-Verfahren angenähert, blähen den Berechnungsaufwand sehr stark auf. Was dabei herauskäme, wäre dann eine Näherung einer Oberfläche, welche die obigen Kriterien im Mittel erfüllt. Eine Näherung bedeutet dann aber auch, dass durch die gewählten Ansatzfunktionen ungewollte Welligkeiten in die gesuchte Oberfläche „wandern“ können, weil eine Näherungsberechnung irgendwann mit einer realistischen Abbruchbedingung (Schwellenwert für die Qualität der Oberfläche) enden muss!

Wenn denn nur eine Näherung für die Berechnung einer minimierten Oberfläche in Aussicht steht, dann kann das somit auch gleich mittels eines Berechnungsverfahrens für diskrete Minimalflächen geschehen.

Näherungsberechnung eines Oberflächenkontinuums sehr aufwendig!

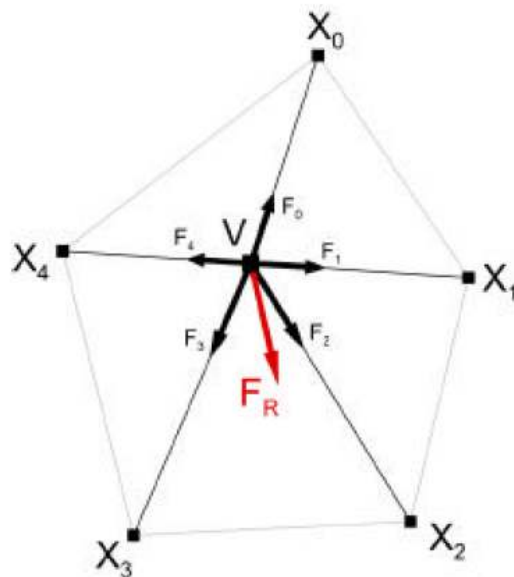
⇒ **Diskrete Minimalfläche minimieren**

3 – Approximation einer triangulierten Polygonoberfläche (lokal minimierte Energie-Funktion)

Eine näherungsweise Minimierung einer Oberfläche ist möglich, wenn diese über Triangulation in eine Polygonoberfläche überführt wird. Als Methode findet dann die Minimierung der Kantenlängen Anwendung, wodurch der Spannungszustand bei einer Seifenhaut nachgebildet werden kann. In dieser Form imitiert man quasi eine lokale Minimierung der Energiefunktion in einzelnen Punkten, dort wo die Kanten zusammenlaufen. Ausgenutzt wird dabei, dass bei einer Minimalfläche auch lokale Flächenbereiche minimal sind. Das bedeutet, wenn durch eine Abweichung der Oberflächeninhalt der gesamten Oberfläche erhöht wird, dann wird diese Änderung auch in der lokalen Umgebung zu einer Erhöhung der Oberfläche führen.

Bei der Polygonoberfläche stellen somit die direkt benachbarten Punkte, welche mit einer Kante verbunden sind, die Anziehungspunkte dar. Die Kräfte werden entlang dieser Kantenverbindungen übertragen, wobei den Kantenlängen (als Masse-Feder-Modell) entsprechende Kräfte zugeordnet werden, die sich auf eine „Normallänge“ mit Wert = 0 beziehen.

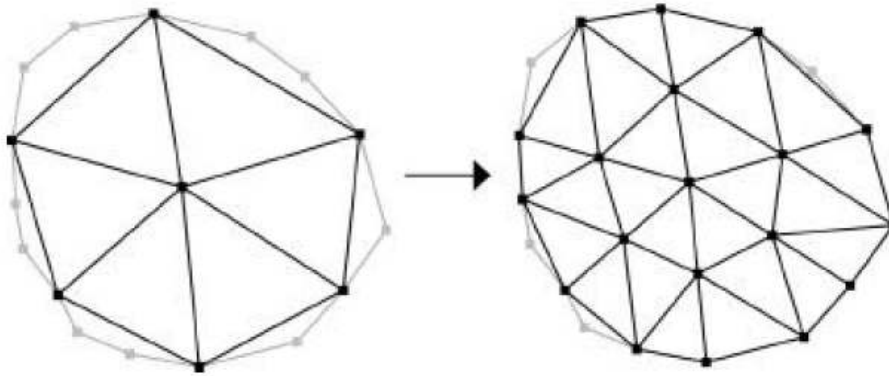
Zur Durchführung der topologischen Minimierung ist dann eine gute und reguläre Triangulation erforderlich.



Masse-Feder-Modell auf einer Polygonoberfläche

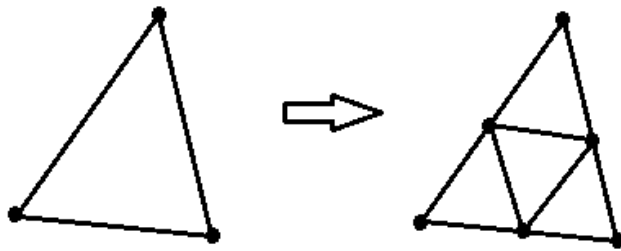
Methode der Triangulation:

Als ideal erweist sich, wenn sich an jedem Punkt (innerhalb der Randkurve) sechs Dreiecke treffen, also ein Hexagon bilden. Als Start-Hexagon haben wir somit einen Punkt innerhalb der Randkurve und 6 weitere Punkte, die sich auf der Randkurve verteilen.



Verfeinerung einer Polygonoberfläche

Eine schrittweise Verfeinerung der dreieckigen Netzstruktur erfolgt dann, indem bei jedem Folgeschritt weitere Zwischenpunkte auf den schon existierenden Kanten gesetzt werden (z.B. Halbierung der Kante). Bei den zu ergänzenden Randkanten-Punkten müssen diese natürlich zusätzlich mit der originalen Randkurve exakt übereinstimmen.



Vor jedem Verfeinerungsschritt muss iterativ eine Minimierung der Oberflächen über eine Euler-Integration erfolgen. Dabei werden die angreifenden Kräfte F_i in jedem Punkt V beispielsweise gemäß dem Hooke'schen Gesetz berechnet. Die Kraft entspricht dann proportional der Federauslenkung, welche hier mit der Kantenlänge gleichgesetzt wird (weil Normallänge = 0).

Kräfte im Punkt V :

$$F_i = c \cdot |X_i - V| \quad c: \text{Federkonstante}$$

$$\Rightarrow \text{resultierende Kraft: } F_R = \sum_{i=1}^N F_i$$

Die Masse in allen Punkten wird als gleich angesetzt und kann vereinfacht den Betrag 1 bekommen. Damit entspricht die Verschiebung des Punktes V dann der resultierenden Kraft F_R . Durch diese Verschiebung in Richtung der resultierenden Kraft wird lokal die Oberflächenenergie minimiert bzw. auch ein Kräfteausgleich geschaffen.

$$\text{neue Position des Punktes } V_t: \quad V_{t+1} = V_t + F_R$$

Mittels des Parameters c (Federkonstante) besitzt man noch etwas Kontrolle über die Genauigkeit der Simulation. Sind die Positionen der Punkte V alle neu berechnet worden, dann erfolgt die nächste Verfeinerung durch neue Zwischenpunkte.

Die Berechnungsschleifen werden schließlich dann abgebrochen, wenn eine Abbruchbedingung unterlaufen wird, also die Oberfläche sich kaum noch ändern würde. Als hilfreich hat sich erwiesen, wenn die maximalen von allen resultierenden Kräften F_{\max} miteinander verglichen werden.

$$\left\| F_{\max t+1} - F_{\max t} \right\| < \varepsilon \quad \text{Abbruchbedingung, da Gleichgewicht der Kräfte nahezu erfüllt ist}$$

Die Genauigkeit der Approximation wird entscheidend durch die Größe ε gesteuert.

Das Resultat:

Als Oberflächen-Topologie kann über diese Art der Näherung nur ein diskreter Polygonflächen-Verbund erzeugt werden. Diese Oberfläche besitzt nur Kanten und ebene Flächen. Um daraus eine Oberfläche mit kontinuierlichen Tangentenstetigkeiten und Krümmungseigenschaften zu erhalten, müsste eine derartige Flächenfunktion über die berechneten Stützpunkte gelegt werden. Das Ergebnis wäre eine sauber gekrümmte Oberfläche (Quasi-Minimalfläche), die jedoch hinsichtlich der originalen Randkurve nur dort Übereinstimmung erzielt, wo die Stützpunkte gelegen haben! D.h., zwischen der Randkurve und der erzeugten Oberfläche gibt es kleine Lücken, die abschließend noch zu schließen wären.