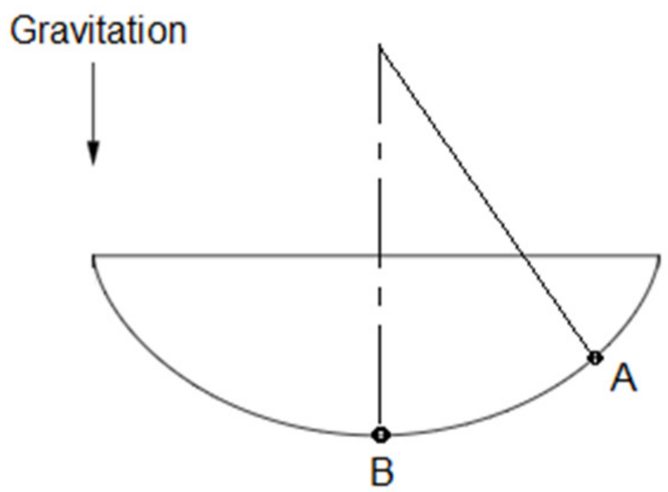
Die Antwort zum „perfekten Pendel“

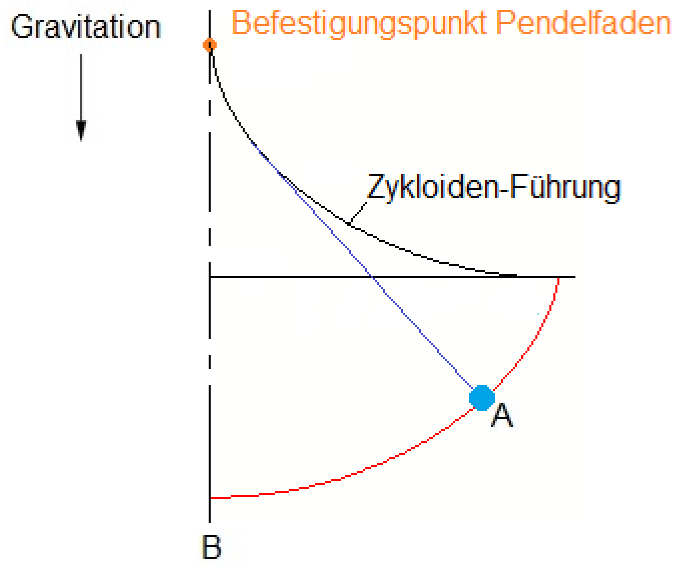
Für den Bau eines „isochronen“ Pendels benötigt man eigentlich nur die ersten 5 aufgeführten Punkte, wenn man auf den Vorteil eines kalkulierenden PC und auf den Ausdruck einer Bahnkurve auf Papier verzichten möchte. Für eine optimierte Umsetzung käme dann noch vielleicht der Blechstreifen zum Einsatz und etwas Alleskleber.

Wie sieht nun ein sich selbst variierendes Pendel aus? Zuerst muss eine Bahnkurve gefunden werden, entlang derer die Pendelmasse zu schwingen hat. Diese Kurve hat die Form einer Zykloide und ist eine Lösung des sogenannten „Brachistochronen-Problems“. Eine Brachistochrone ist die Kurve, die ein Massepunkt nehmen müsste, um in der kürzesten Zeit von einem Ort A zu einem tiefer gelegenen Ort B zu gelangen, angetrieben durch das homogene Feld der Gravitation.



Eine weitere interessante Eigenschaft dieser Zykloiden-Kurve ist, dass der Punkt A beliebig auf der Kurve starten kann und trotzdem immer dieselbe Zeit bis nach B benötigt. Die Zykloide erfüllt somit auch die Eigenschaft der Isochronie. Jetzt muss nur eine Möglichkeit gefunden werden, wie der Pendelfaden so manipuliert wird, dass die Masse auf dieser besonderen Kurve zum Schwingen kommt.

Und damit kommen wir zu dem Begriff der „Fadenlinie“ aus der Mathematik, besser bekannt unter der Bezeichnung Evolvente. Eine Evolvente entsteht, wenn man von einem bestimmten Startpunkt aus (auf der Kurve) einen Faden abrollen lässt, dessen Länge mit der jeweils abgerollten Bogenlänge übereinstimmt. Das Schöne an einer Zykloiden ist nun, dass die Evolvente von ihr wiederum eine Zykloiden-Kurve ergibt. Das bedeutet, man kann den Faden des Pendels entlang einer Zykloiden-Führung sich anschmiegen lassen und erhält für die Bahnkurve der Masse die gewünschte Zykloide und hat somit auch schon das „perfekte Pendel“.



Die benötigte Zykloiden-Führung lässt sich annähernd gut durch eine Nagelreihe (je 12 Nägel auf jeder Seite des Pendelausschlages) bewerkstelligen, die man in das Brett fixiert. Eine Alternative wäre das Anbringen zweier Blechstreifen, die auf die entsprechende Zykloidenform zurechtgebogen sind, dann rollt das Fadenpendel auch stetig auf der Blech-Führung ab.

Der letzte offene Punkt ist dann, wie die Zykloiden-Beschreibung der Führung lautet, mit welcher eine Schwingungsdauer von 1 Sekunde realisiert würde?

In x-y-Koordinaten ausgedrückt lauten die Parameter-Gleichungen:

$$x(\varphi) = \frac{L}{4} \cdot [2\varphi - \sin(2\varphi)]$$

$$y(\varphi) = -\frac{L}{4} \cdot [1 - \cos(2\varphi)] \qquad mit \qquad \pm\varphi = 0 \ldots \frac{\pi}{2}$$

Die Pendelmasse schwingt dann auf einer Bahn mit folgender Beschreibung:

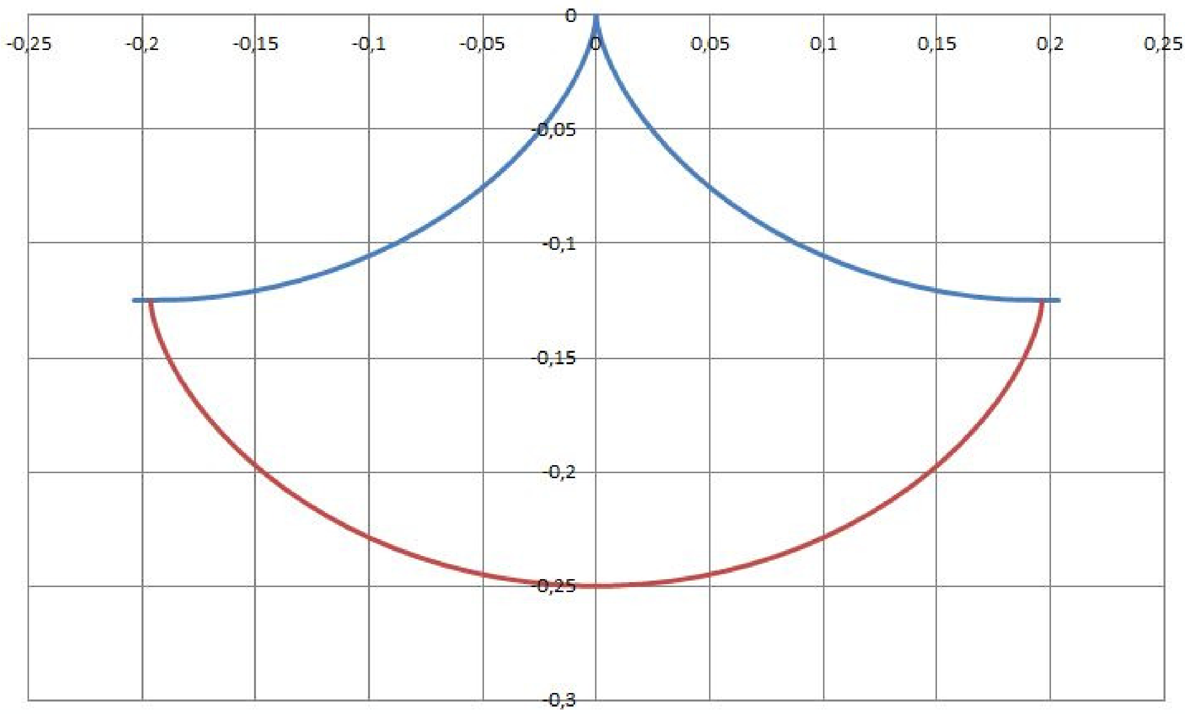
$$x(\varphi) = \frac{L}{4} \cdot [2\varphi - \pi - \sin(2\varphi)]$$

$$y(\varphi) = -\frac{L}{4} \cdot [3 - \cos(2\varphi)] \qquad mit \qquad \varphi = 0 \ldots \pi$$

Dabei geht die benötigte Pendel-Fadenlänge aus der Gleichung für das reine mathematische Pendel hervor:

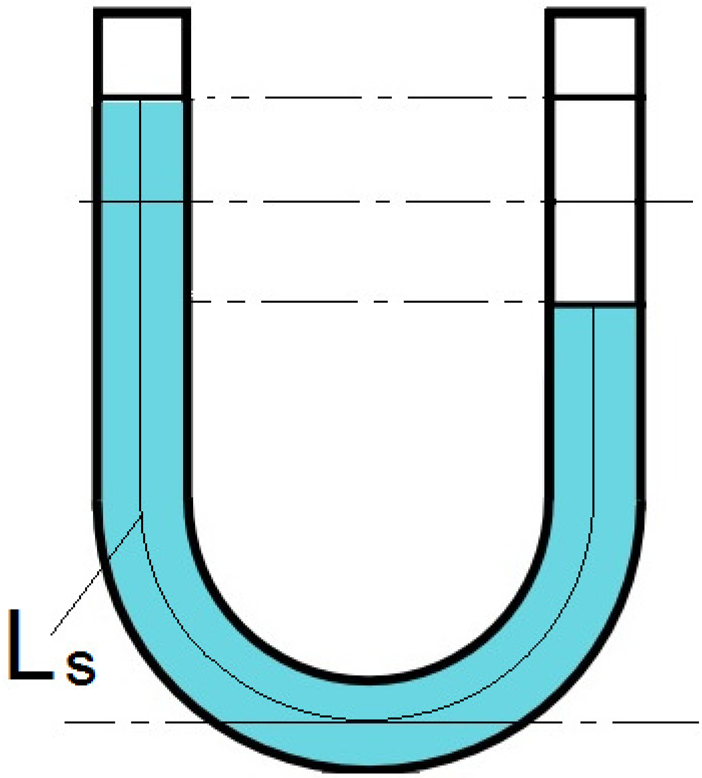
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad \rightarrow \quad L = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \cdot g \quad \rightarrow \quad L = 0{,}249 \;\; m$$

Die entsprechenden Parameter-Kurven der Zykloiden:



Eine weitere Anmerkung:

Das in der Materialliste erwähnte U-Rohr (gefüllt mit Wasser) kann dabei als Kontroll-Apparatur genutzt werden, wenn beide Schenkel zusammen eine Wassersäulenlänge Ls von der doppelten Fadenlänge des Pendels besitzen. In diesem Fall würde die schwingende Wassersäule in dem U-Rohr dieselbe Schwingungsdauer besitzen wie das „perfekte Pendel" und zudem unabhängig von der Auslenkung der Wassersäule ebenfalls isochron schwingen.



$$T = 2\pi\sqrt{\frac{Ls}{2g}} \quad \rightarrow \quad Ls = 2L = 0{,}498 \quad m \quad \rightarrow \quad T = 1s$$

Alle anderen aufgeführten Punkte der Materialliste waren reine Erfindung und haben mit dem Bau des Pendels nichts zu tun.