Das perfekte Pendel:

Obwohl es sich namentlich nur um ein „mathematisches Pendel" handelt, so ist die nun die kommende physikalische Aufgabe doch schon recht schwierig zu lösen. Aber sie ist immerhin lösbar!

Ein „mathematisches Pendel" zeichnet sich damit aus, dass es folgende idealisierte Merkmale aufweist:

1. Es gibt keine Reibung im System.
2. Die Pendelmasse wird als punktförmig aufgefasst.
3. Der Faden der Länge L gilt als masselos.

Innerhalb einer sehr kleinen Auslenkung liegt dann eine quasi-konstante Periodendauer beim Schwingen vor. Die Schwingungsdauer, also das einmalige Hin- und Zurückschwingen der Masse, errechnet sich allgemein mit der folgenden Formel:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

T: Schwingungsdauer in s g: Erdbeschleunigung 9,81 m/s²

Sobald die Auslenkungen des Pendels aber größer sind (maximal 90° von der Senkrechten gemessen), wirkt sich der Auslenkungswinkel φ (in rad gemessen!) auf die Periodendauer wie folgt aus:

$$T(\varphi) = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \cdot \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \sin^4\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \ldots\right]$$

Man sieht, dass mit größeren Auslenkungen auch längere Schwingzeiten einhergehen, weil die Summe innerhalb der eckigen Klammer mit dem Winkel φ zunimmt, sofern sich die Werte φ zwischen $\pm 0 \ldots \pi/2$ bewegen.

Diese Beziehung folgt aus der Lösung der Differentialgleichung für ein „mathematisches Pendel", welche diese Form hat:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{L} \cdot \sin\varphi = 0$$

Die Gleichung erklärt dann auch, warum bei sehr kleinen Winkeln φ die Schwingung als harmonisch bezeichnet werden kann, weil dann der $\sin \varphi \rightarrow \varphi$ läuft. Die Differentialgleichung reduziert sich auf die Form eines harmonischen Schwingungssystems mit konstanten Schwingfrequenzen (isochron).

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{L} \cdot \varphi = 0$$

Diese Art Schwingungssysteme zeichnen sich dadurch aus, dass entlang des Weges der Bewegung die dort angreifende Tangentialkomponente der rücktreibenden Kraft sich mit dem Weg proportional ändert. Einfachstes Beispiel wäre ein Masse-Feder-System, um eine harmonische Schwingung zu verdeutlichen. Denn proportional mit dem Stauchen bzw. Dehnen einer Feder ändert sich die dazugehörige Reaktionskraft. Kurz gesagt: Wenn entlang einer Bahn diese Art der Proportionalität zwischen Weglänge und Rückstellkraft besteht, dann ist die schwingende Bewegung harmonisch mit konstanten Schwingzeiten.

Solche konstanten Schwingzeiten sind natürlich für die Praxis sehr nützlich und entgegenkommend, wenn man z.B. über dieses Prinzip einer mechanischen Uhr einen bestimmten Takt vorgeben möchte. Pendeluhren sind somit hinsichtlich unterschiedlicher Auslenkungen größerer Art nicht gerade geeignet. Je größer der Pendelausschlag wäre, desto „langsamer" würde die Pendeluhr laufen.

Und damit kommen wir zu dem Problem, welches zu lösen wäre.

Die Frage lautet:

Wie könnte ein Pendel konzipiert sein, damit sich unabhängig von der Auslenkung stets konstante Schwingdauern (T = 1s) einstellen?

Beim Pendelbau muss also berücksichtigt werden, dass mit der Bewegung der Pendelmasse das System permanent verändert wird. Diese Änderung muss dafür sorgen, dass die Erdbeschleunigung als die treibende Größe entlang der Bahn der Pendelmasse eine lineare Weg-Kraft-Beziehung bewirkt.

Folgende Materialien sollen dazu zur Verfügung stehen:

- 1x Faden ca. 2m lang (z.B. Nähgarn)
- Kästchen mit Nägeln (mindestens 25 Stück)
- Bleikugel Ø10mm (Ø2mm gebohrt)
- Brett 0,5m x 0,5m   ca. 1cm dick
- Geodreieck + Lineal 30cm und Bleistift/Papier
- PC + Drucker
- Blechstreifen 2cm x 50 cm - 0,5mm dick + Blechschere
- U-Rohr mit Schenkelhöhe ca. 35cm und Ø ca. 2cm
- 1/2 Liter Wasser
- 24 Permanentmagnete (z.B. kleine Neodym-Magnete Ø5x1)
- 3 Zahnräder mit Steckachsen Ø6mm; Zähnezahl = 10/32/100 ; Modul = 1mm
- Zirkel mit Schenkellänge zwischen 5 … 8 cm
- 2 alte CDs
- Handbohrmaschine mit Drillbohrer Ø6
- Klebstoff (Alleskleber)
- 2 Holzstifte Ø15mm – ca. 40mm lang

Nun die große Frage:

Welche Materialien reichen aus, um das „perfekte Pendel“ zu konstruieren?

Wie sieht dann die Konstruktion prinzipiell aus?

[unberücksichtigt soll dabei der Einfluss der Erdrotation auf das Pendel sein, was dann zum Phänomen des Foucaultschen Pendel führen würde]