

Stabilitätsprobleme der Elastostatik

Theoretische Behandlung der
Instabilitätserscheinungen bei Stäben,
Stabprofilen sowie Platten und Schalen

von
Kai-Uwe Ekrutt

Juni 2015

Erste Fassung 001.04062015

Inhaltsverzeichnis

	<u>Seite</u>
Vorwort	3
1. Die Eulersche Knicktheorie	5
1.1 Die Euler-Fälle eines Knick-Stabes:	5
1.2 Knicklastbestimmung aus den Gleichgewichtsbedingungen:	6
1.3 Knicklastbestimmung allein aus den Randbedingungen der elastischen Linie:	14
1.4 Knicklastbestimmung über die Energiemethode:	19
1.5 Bestimmung der Biegelinie eines elastischen Knickstabes:	26
1.6 Bestimmung der Biegelinie eines elastischen Knickstabes per Iterationsverfahren:	33
1.7 Die Knickbiegung und ihre Biegelinie im unterkritischen Bereich:	37
1.8 Die Knicklast als Merkmal der verschwindenden Eigenfrequenz:	41
1.9 Die Knicklastbestimmung mittels der Differenzenrechnung:	44
2. Dimensionierung von Knickstäben	49
2.1 Die Euler-Hyperbel und der Tetmajer-Bereich:	49
2.2 Das Omega-Verfahren (ω):	53
3. Kippen von Trägern:	55
3.1 Das Kippen eines auf Biegung beanspruchten brettförmigen Kragbalkens:	55
3.2 Weitere Belastungsfälle bei brettförmigen Trägern bzgl. des Kippens:	60
3.2.1 Beispiel: Träger in Gabellagerung mit Randlastmomenten an den Enden:	61
3.3 Der Rayleigh-Quotient als erste Näherung für den Eigenwert λ :	62
3.3.1 Beispiel: Träger in Gabellagerung mit kontinuierlicher Streckenlast q :	63
3.3.2 Beispiel: Fest eingespannter Träger mit kontinuierlicher Streckenlast q :	65
3.3.3 Beispiel: Träger in Gabellagerung mit mittiger Kraft F :	67
4. Knickung bei Kreisringen/Rohren sowie Beulung bei Platten und Schalen:	69
4.1 Einleitung zu den speziell ausgewählten Problemfällen:	69
4.2 Das Ausknicken eines kreisförmigen Ringes:	69
4.2.1 Das Ausknicken eines kreisförmigen Ringes mit Kreisquerschnitt:	72
4.2.2 Das Ausbeulen einer Kreiszyinderschale unter Außendruck:	72
4.3 Die Beulung von Platten und Schalen:	72
4.3.1 Betrachtungen an der Rechteckplatte:	73
4.3.2 Betrachtungen an der Kreisplatte:	75
4.3.3 Betrachtungen an Kreiszyinderschale mit axialer Druckbelastung:	76
5. Nachwort	79
Quellenverweise und weiterführende Fachliteratur	80

Vorwort

Im Rahmen der Festigkeitsberechnungen von Bauteilen des allgemeinen Maschinenbaus werden im Regelfall die Fälle betrachtet, bei welchen die äußeren Belastungen einer Konstruktion (statischer wie auch dynamischer Natur) zu entsprechenden Bauteilspannungen und –verformungen führen. Diese Spannungen/Verformungen müssen nachgewiesen werden, ob diese an ihren kritischen Stellen der Konstruktion stets unterhalb der zulässigen Werte liegen. Bei den errechneten Spannungen geben uns die Materialkennwerte Aufschluss darüber, wie viel Sicherheit S zwischen vorhandener Spannung $\sigma_{vorh.}$ und zulässiger Spannung $\sigma_{zul.}$ existiert.

$$S = \frac{\sigma_{vorh.}}{\sigma_{zul.}}$$

Bei den Verformungen (Durchbiegungen, Verdrehung, Längenänderung) muss der Konstrukteur schon differenzierter hinschauen, inwieweit die zu erwartenden Maßabweichungen von der unbelasteten Ausgangsgestalt der gewünschten Funktion des Bauteils noch zuträglich ist. Beispielsweise wird sich bei rotierenden Wellen zwangsläufig eine Unwucht einstellen und bestimmte Bereiche nicht mehr mit der theoretischen Längsachse fluchten. Bei anderen Konstruktionen könnte eine Verformung dazu führen, dass sich eine ungünstige Passungsverlagerung einstellt, die entweder zur Auswirkung hat, dass Passungselemente nicht mehr ideal zueinander gefügt werden können oder diese sich im Fügezustand gegenseitig behindern (Klemmung) und notwendige Gleitverschiebungen ausbleiben. All diese Konsequenzen kann der Konstrukteur beim Entwurf / bei Überprüfung seines Designs im Voraus ins Kalkül ziehen und bei seinen Berechnungen berücksichtigend bewerten und ggf. in weiteren Schritten korrigieren. Denn die belastete Konstruktion wird sich in den überwiegenden Fällen auch in einem stabilen Gleichgewicht mit den äußeren Randlastbedingungen befinden.

Für die meisten Problembehandlungen wird dann eine Berechnung im linear-elastischen Bereich ausreichen, die dem Hookschen Gesetz genügen. D.h., die im Bauteil sich einstellenden Verzerrungen, Verschiebungen und Spannungen (Zug-, Druck-, Schubspannungen) verhalten sich proportional zu ihren Lasten (Kräfte, Biegemomente, Torsionsmomente, Temperaturlasten etc.). Liegt eine solche Stabilität des Gleichgewichts vor, so kann wegen den linear-elastischen Beziehungen schnell eine Aussage getroffen werden, ob die Konstruktion z.B. mit 10% höheren Randlasten noch sicher wäre ($S^* = ?$), weil die vorhandenen Spannungen und Verformungen einfach um 10% nach oben extrapoliert werden können.

$$S = \frac{\sigma_{vorh.}}{\sigma_{zul.}} \quad S^* = \frac{\sigma_{vorh.} \cdot (100\% + 10\%)}{\sigma_{zul.}} = \frac{S}{1,10}$$

Diese Betrachtungsweise versagt jedoch bei Bauteilen, die aufgrund ihres Lastfalles in einen Zustand der Instabilität treten können, obgleich die Bauteilbeanspruchungen, – kurz vor Eintritt der instabilen Lage (noch im „unterkritischen“ Bereich befindlich) –, weit unterhalb der zulässigen Festigkeitsgrenzen des Werkstoffs liegen. Solche Instabilitäten können beispielsweise bei schlanken Stäben auftreten, die in ihrer Längsachse auch auf Druck beansprucht werden und somit zum Ausknicken neigen. Sobald diese kritische Drucklast erreicht wird, wandert das Verhalten des Bauteils aus den Gesetzmäßigkeiten der linear-elastischen Beziehungen heraus hin zu einem nichtlinearen Verhalten. Im Fall des Knickstabes nimmt dann die Katastrophe ihren Lauf. Das Verhalten wird spontan „überkritisch“, weil sich der Stab aus seiner theoretisch geraden Gestalt schon bei kleinster

Störung herausbewegen wird (seitliches Ausbrechen) und damit der sich fortan permanent verändernde Belastungszustand (am jetzt verformten Stab) eine rasante Verschlimmerung erleidet. Es kommt schlagartig zum plötzlichen Ausknicken oder gar zum Bruch des Stabes. Das Fatale an derartigen Stabwerken (Rahmen, Fachwerke, Stützpfeiler) ist, dass man das katastrophale Versagen an jener Konstruktion, kurz bevor die zerstörerische Instabilität einsetzt, äußerlich nicht im mindesten ansehen kann. Setzt dann die Instabilität ein, dann bricht die Konstruktion in Sekundenschnelle in sich zusammen und hinterlässt furchtbare Spuren der Zerstörung. Insbesondere bei Tragwerken (Hallenkonstruktionen, Leichtbauweisen), deren Bauelemente hauptsächlich nur aus stabförmigen Tragstützen und Blechversteifungen bestehen, kann ein Ausknicken und Ausbeulen der tragenden Elemente zu einer Tragödie führen, sofern innerhalb oder in der Nähe dieser Tragwerke Personen verkehren. Tragische Hallen-Einstürze aus der Vergangenheit zeigen offenkundig, wie gefährlich es sein kann, wenn sich beispielsweise auf Flachdächern witterungsbedingt übermäßige Schneelasten auftürmen und irgendwann die kritische Belastungsgrenze des Tragwerks erreicht wird. Leider zeigen sich bei einem bevorstehenden Einsturz dieser Kategorie keinerlei Vorboten, die über das mögliche Versagen der Konstruktion künden. Kein Ächzen im Gebälk, kein Knacken im Tragwerk, weder Risse noch Deformationen zeugen über das kommende Unheil. Und das Unheil kommt wie ein Hammerschlag.

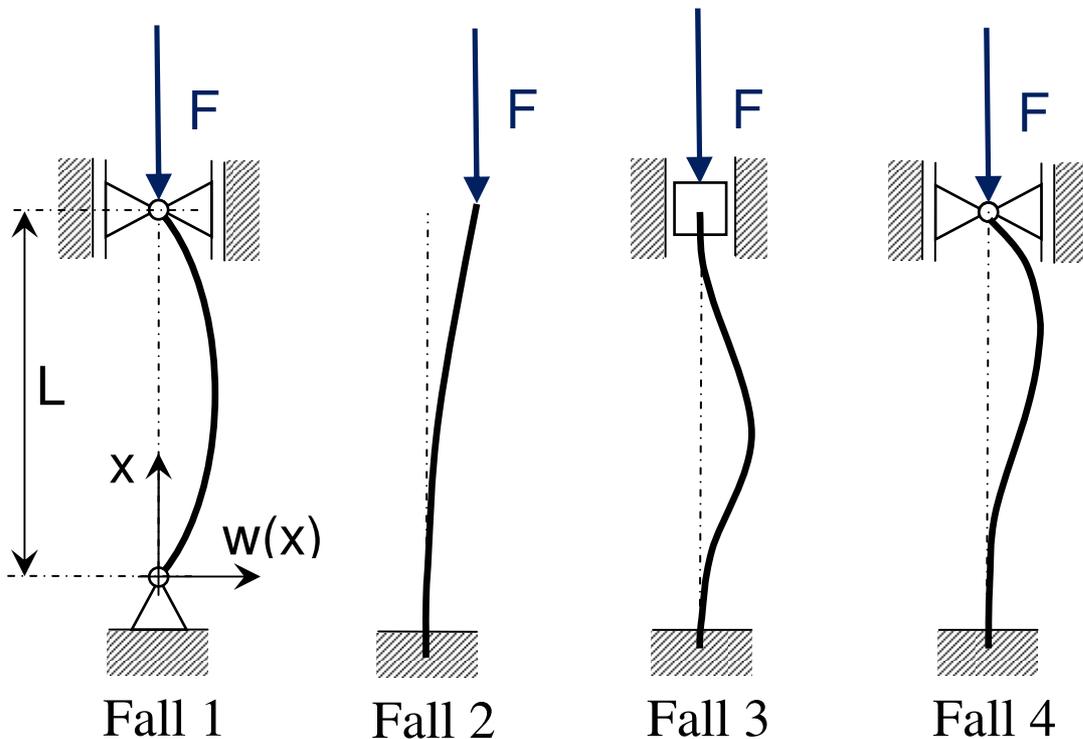
Daher sei hier an dieser Stelle besonders darauf hingewiesen, dass dieses Skript keinesfalls dazu benutzt werden darf, um Tragwerke oder tragende Konstruktionen jeglicher Art damit auszulegen! Die Berechnungsgrundlagen müssen hierfür aus den dazu vorgesehenen Vorschriften und Regelwerken der Bautechnik entnommen werden! Das vorliegende Skript soll lediglich einen Überblick geben, mit welchen theoretischen Methoden man bestimmten Stabilitätsproblemen zu Leibe rücken kann, um zu einer theoretischen Knick- bzw. Drucklast zu gelangen. Die im Folgenden dargestellten und abgeleiteten Formeln/Gleichungen sind daher ohne jegliche Gewähr und können fehlerhaft sein oder dürfen sogar von den gesetzlichen Vorgaben her gar nicht zur Anwendung kommen! Wer auch immer als Konstrukteur / Baustatiker eine Bauteilauslegung vornimmt, muss sich darüber ganz im Klaren sein, dass er hier eigenverantwortlich handelt und die notwendigen Berechnungsgrundlagen aus gesicherten Quellen in Eigeninitiative zusammenträgt und/oder die dazu erforderlichen Regelwerke/Normen zur Hand nimmt.

Mit den folgenden Seiten soll daher der Versuch unternommen werden, einigen der klassischen Probleme der Knicktheorie zu begegnen. Dazu gehören dann auch speziellere Betrachtungen zur Knickbiegung, zum Drillknicken, dem Kippen von Stäben und dem Ausbeulen von Platten / Schalen.

1. Die Eulersche Knicktheorie

1.1 Die Euler-Fälle eines Knick-Stabes:

Bei der Untersuchung der Eulerschen Knickfälle geht man von einem geradlinigen Stab aus, der in seiner Längsachse mit einer Druckkraft F beansprucht wird. Je nach Lagerungstyp lassen sich 4 Grundfälle unterscheiden, so wie sie in der folgenden Skizze dargestellt sind.



Die Lagerbedingungen definieren in diesen Fällen, in welcher Weise die verformte Knicklinie an jenen Stellen auszusehen hat. Damit lassen sich also die Kurvenverläufe an den Randlagen des Stabes bei $x=0$ und $x=L$ festlegen, die später bei der Lösungsfindung der kritischen Last F_K von Bedeutung sein werden.

Die Merkmale des Stabes werden mit den folgenden Angaben gekennzeichnet:

- E:** E-Modul des Werkstoffs
Dieser Materialkennwert gibt die Beziehung zwischen der Spannung σ und der Dehnung ε im linear-elastischen Bereich an und stellt damit die Proportional-konstante im Hookschen Gesetz dar. $\sigma = E \cdot \varepsilon$
- I:** Flächenmoment 2.Grades des Stabquerschnittes
Dieser Wert liefert eine Aussage über die Geometrie des Biegequerschnittes des Stabprofils, nämlich über die Biegesteifigkeit in Richtung der Durchbiegung $w(x)$. Für die Knickfälle wird immer die Durchbiegungsrichtung betrachtet, die das kleinere Flächenmoment I besitzt, da der Wert des Flächenmoments von der Bezugsachse (Biegeachse) abhängt.
- L:** Die Länge des Stabes

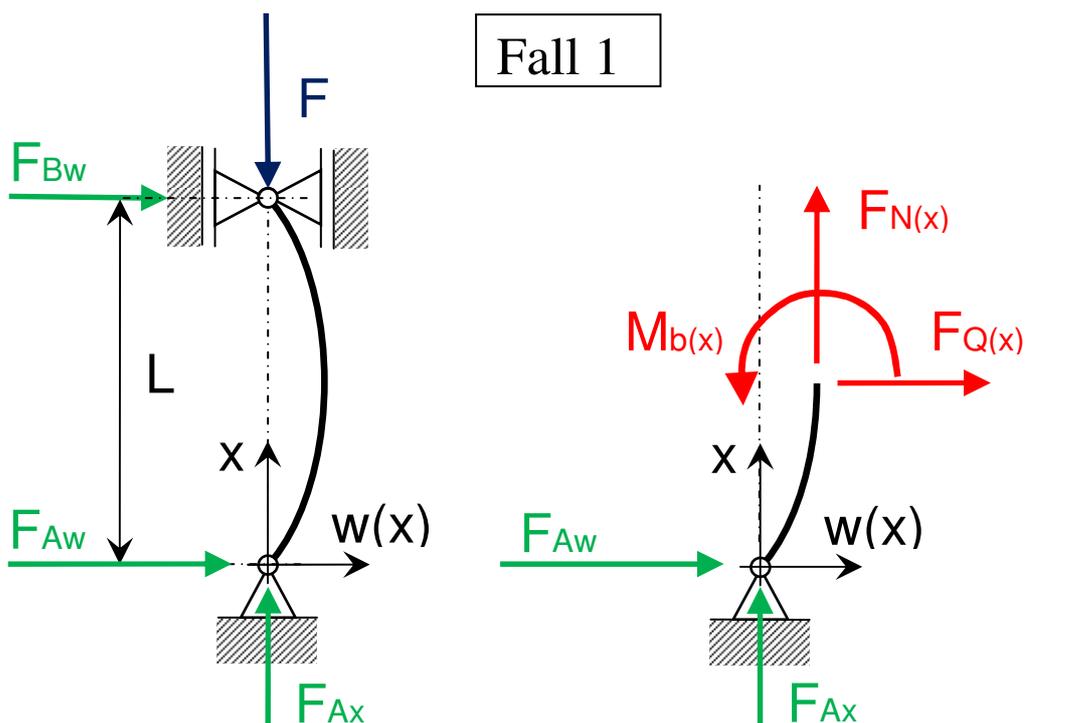
Für die Betrachtung der Knickfälle sollen die Gleichgewichtsbedingungen für den verformten Zustand aufgestellt werden (Theorie II. Ordnung). Dabei soll die Einschränkung gelten, dass die einprägende Druckkraft F auch weiterhin am verformten Stab seine Richtung beibehält und nicht ändert. Sie wirkt also immer parallel zur x -Achse bzw. der noch unverformten Stablängsachse. Die Suche nach den kritischen Lastwerten F_K erfolgt dann durch die Berechnung der Eigenwerte der vorliegenden Randwertprobleme.

1.2 Knicklastbestimmung aus den Gleichgewichtsbedingungen:

Als erste Methode zur Bestimmung der kritischen Knicklast sollen allein die bekannten Gleichgewichtsbedingungen zur Anwendung kommen. In diesem Fall müssen die Schnittlasten (grün) des Stabes im Gleichgewicht mit der Randlast F (blau) und den Auflagerreaktionen (rot) stehen. Die Schrittweise Auflösung des Gleichungssystems sowie die Verknüpfung mit der Gleichung für die elastische Linie (mit ihren entsprechenden Randbedingungen) führen letztendlich auf eine Bestimmungsgleichung für die Eigenwerte.

Fall 1:

Die Schnittlasten und Auflagerreaktionen:



$$F_{Ax} = F$$

$$F_{Aw} = 0$$

$$F_{Bw} = 0$$

$$F_{N(x)} = -F$$

$$M_{b(x)} = F_{Ax} \cdot w(x) = F \cdot w(x)$$

Aus der Theorie der Balkenbiegung (gemäß der Hypothese von Bernoulli) kann die Differentialgleichung der Biegelinie (elastische Linie) zur Anwendung kommen. Als angenähert linearisierte Form gibt diese Gleichung eine Proportionalität zwischen dem Biegemoment $M_b(x)$ und der zweiten Ableitung der Durchbiegung $w(x)$ an.

$$\frac{-M_{b(x)}}{E \cdot I_{(x)}} = w''(x) \quad \Rightarrow \quad w''(x) + \frac{F}{E \cdot I} \cdot w(x) = 0 \quad \text{wenn} \quad I_{(x)} = I = \text{const.}$$

Das führt auf die folgende homogene Differentialgleichung:

$$w''(x) + \alpha^2 \cdot w(x) = 0 \quad \text{mit} \quad \alpha^2 = \frac{F}{E \cdot I}$$

mit der allgemeinen Lösung:

$$w(x) = C_1 \cdot \sin(\alpha \cdot x) + C_2 \cdot \cos(\alpha \cdot x)$$

Eine „triviale Lösung“ ergibt sich für den Grundzustand des unverformten Stabes, wenn die Konstanten $C_1 = 0$ und $C_2 = 0$ gesetzt werden bzw. $\alpha = 0$ vorliegen sollte. Über diesen Weg kommen wir jedoch nicht zur Lösung der kritischen Knicklast, bei welcher nun auch eine nichttriviale Lösung angeführt werden muss. Zuerst sollen aber die Randbedingungen mit einfließen, um die gewünschte Bestimmungsgleichung zu erhalten.

Randbedingungen:

$$w(0) = 0 = C_2 \cdot \cos(\alpha \cdot 0) \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$$

$$w(L) = 0 = C_1 \cdot \sin(\alpha \cdot L) \quad \Rightarrow \quad \alpha \cdot L = n \cdot \pi \quad \text{mit} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Eigenwerte:
$$\alpha = \frac{n \cdot \pi}{L} \quad \text{mit} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Setzt man diesen Ausdruck in die obige Definition für α ein, dann kann die Eigenwerte für die kritischen Lasten berechnet werden.

$$F_K = \frac{n^2 \cdot \pi^2}{L^2} \cdot E \cdot I \quad \text{mit} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

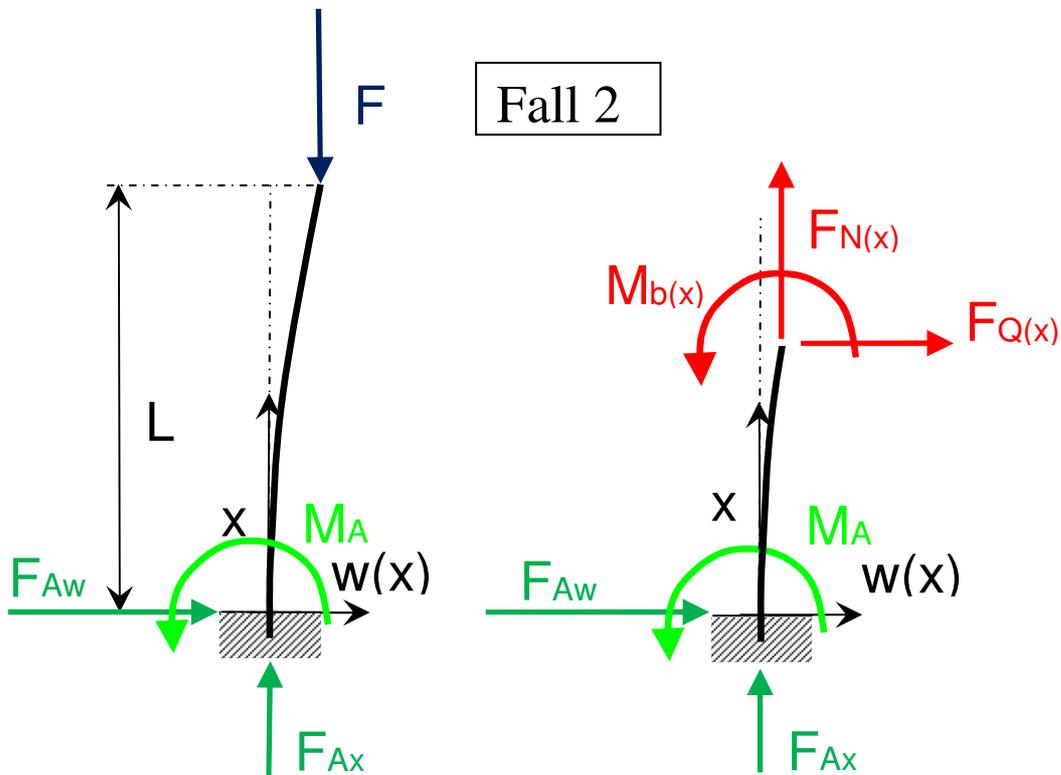
Da das Ausknicken schon bei der kleinsten kritischen Last einsetzen wird, muss nur der erste Eigenwert betrachtet werden mit $n = 1$.

Eulersche Knicklast F_{E1} für den 1. Knickfall:

$$\underline{\underline{F_{E1} = \frac{\pi^2}{L^2} \cdot E \cdot I}}$$

Fall 2:

Die Schnittlasten und Auflagerreaktionen:



$$\begin{aligned}
 F_{Ax} &= F & F_{N(x)} &= -F \\
 F_{Aw} &= 0 & M_{b(x)} &= F_{Ax} \cdot w(x) - M_A = F \cdot w(x) - M_A = F \cdot (w(x) - w(L)) \\
 M_A &= F \cdot w(L)
 \end{aligned}$$

Das führt auf die folgende inhomogene Differentialgleichung:

$$w''(x) + \alpha^2 \cdot w(x) = \alpha^2 \cdot w(L) \quad \text{mit} \quad \alpha^2 = \frac{F}{E \cdot I}$$

mit der allgemeinen Lösung:

$$w(x) = C_1 \cdot \sin(\alpha \cdot x) + C_2 \cdot \cos(\alpha \cdot x) + w(L)$$

und der ersten Ableitung: (wird benötigt für die Randbedingung an der Einspannstelle)

$$w'(x) = C_1 \cdot \alpha \cdot \cos(\alpha \cdot x) - C_2 \cdot \alpha \cdot \sin(\alpha \cdot x)$$

Randbedingungen:

$$w'(0) = 0 = C_1 \cdot \alpha \cdot \cos(\alpha \cdot 0) \Rightarrow C_1 = 0 \quad , \text{weil } \alpha \neq 0$$

$$w(L) = C_2 \cdot \cos(\alpha \cdot L) + w(L)$$

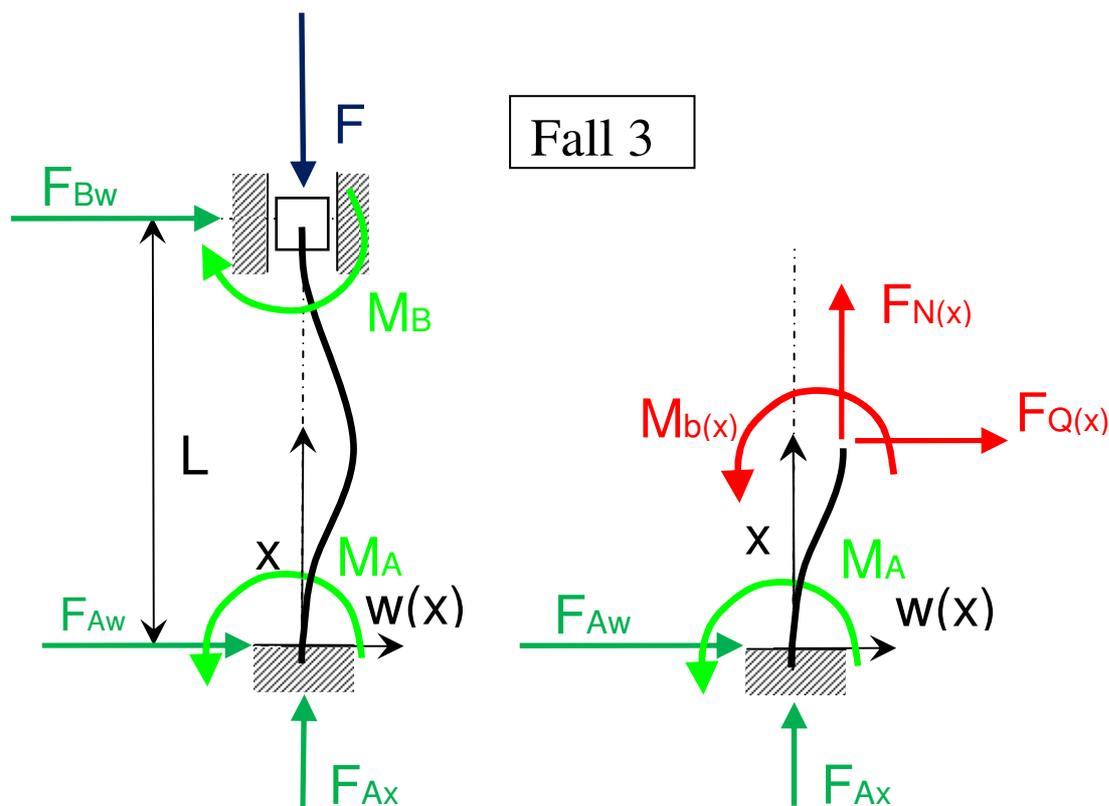
$$\Rightarrow 0 = C_2 \cdot \cos(\alpha \cdot L) \Rightarrow \alpha \cdot L = (2 \cdot n - 1) \frac{\pi}{2} \quad \text{mit } n = 1, 2, 3, \dots$$

Eigenwerte:
$$\alpha = (2 \cdot n - 1) \frac{\pi}{2 \cdot L} \quad \text{mit } n = 1, 2, 3, \dots$$

Eulersche Knicklast F_{E2} für den 2. Knickfall ($n = 1$):
$$F_{E2} = \frac{\pi^2}{4 \cdot L^2} \cdot E \cdot I$$

Fall 3:

Die Schnittlasten und Auflagerreaktionen:



$$F_{Ax} = F$$

$$F_{Aw} = -F_{Bw}$$

$$M_A = M_B + F_{Bw} \cdot L$$

$$F_{N(x)} = -F$$

$$M_{b(x)} = F_{Ax} \cdot w(x) - F_{Aw} \cdot x - M_A$$

Das führt auf die folgende inhomogene Differentialgleichung:

$$w''(x) + \alpha^2 \cdot w(x) = \frac{F_{Aw} \cdot x + M_A}{E \cdot I} \quad \text{mit} \quad \alpha^2 = \frac{F}{E \cdot I}$$

mit der allgemeinen Lösung:

$$w(x) = C_1 \cdot \sin(\alpha \cdot x) + C_2 \cdot \cos(\alpha \cdot x) + \frac{F_{Aw} \cdot x + M_A}{E \cdot I}$$

und der ersten Ableitung: (wird benötigt für die Randbedingung an der Einspannstelle)

$$w'(x) = C_1 \cdot \alpha \cdot \cos(\alpha \cdot x) - C_2 \cdot \alpha \cdot \sin(\alpha \cdot x) + \frac{F_{Aw}}{E \cdot I}$$

Randbedingungen:

$$w(0) = 0 = C_2 \cdot \cos(\alpha \cdot 0) + \frac{M_A}{E \cdot I} \Rightarrow C_2 = -\frac{M_A}{E \cdot I}$$

$$w'(0) = 0 = C_1 \cdot \alpha \cdot \cos(\alpha \cdot 0) + \frac{F_{Aw}}{E \cdot I} \Rightarrow C_1 = -\frac{F_{Aw}}{\alpha \cdot E \cdot I}$$

$$w(L) = 0 = -\frac{F_{Aw}}{\alpha \cdot E \cdot I} \cdot \sin(\alpha \cdot L) - \frac{M_A}{E \cdot I} \cdot \cos(\alpha \cdot L) + \frac{F_{Aw} \cdot L + M_A}{E \cdot I}$$

$$\Rightarrow 0 = F_{Aw} \cdot \left[L - \frac{1}{\alpha} \cdot \sin(\alpha \cdot L) \right] + M_A \cdot [1 - \cos(\alpha \cdot L)] \quad [I.]$$

$$w'(L) = 0 = -\frac{F_{Aw}}{\alpha \cdot E \cdot I} \cdot \alpha \cdot \cos(\alpha \cdot L) + \frac{M_A}{E \cdot I} \cdot \alpha \cdot \sin(\alpha \cdot L) + \frac{F_{Aw}}{E \cdot I}$$

$$\Rightarrow 0 = F_{Aw} \cdot [1 - \cos(\alpha \cdot L)] + M_A \cdot \alpha \cdot \sin(\alpha \cdot L)$$

$$\Rightarrow M_A = -F_{Aw} \cdot \left[\frac{1 - \cos(\alpha \cdot L)}{\alpha \cdot \sin(\alpha \cdot L)} \right] \quad [II.]$$

Die Gleichung II. eingesetzt in I. ergibt dann:

$$0 = F_{Aw} \cdot \left[L - \frac{1}{\alpha} \cdot \sin(\alpha \cdot L) \right] - F_{Aw} \cdot \left[\frac{1 - \cos(\alpha \cdot L)}{\alpha \cdot \sin(\alpha \cdot L)} \right] \cdot [1 - \cos(\alpha \cdot L)]$$

$$\Rightarrow 0 = L \cdot \alpha \cdot \sin(\alpha \cdot L) - \sin^2(\alpha \cdot L) - [1 - \cos(\alpha \cdot L)]^2$$

$$\Rightarrow 0 = L \cdot \alpha \cdot \sin(\alpha \cdot L) - \sin^2(\alpha \cdot L) - 1 + 2 \cdot \cos(\alpha \cdot L) - \cos^2(\alpha \cdot L)$$

$$\Rightarrow 0 = L \cdot \alpha \cdot \sin(\alpha \cdot L) - 2 \cdot [1 - \cos(\alpha \cdot L)] \quad [III.]$$

An dieser Stelle helfen nun die trigonometrischen Additionstheoreme weiter mit:

$$\sin(\alpha \cdot L) = 2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha \cdot L}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha \cdot L}{2}\right)$$

$$\cos(\alpha \cdot L) = 1 - 2 \cdot \sin^2\left(\frac{\alpha \cdot L}{2}\right)$$

Daraus folgt dann für Gleichung III. :

$$\Rightarrow 0 = L \cdot \alpha \cdot 2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha \cdot L}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha \cdot L}{2}\right) - 2 \cdot \left[1 - 1 + 2 \cdot \sin^2\left(\frac{\alpha \cdot L}{2}\right)\right]$$

$$\Rightarrow 0 = \sin\left(\frac{\alpha \cdot L}{2}\right) \cdot \left[\frac{L \cdot \alpha}{2} \cdot \cos\left(\frac{\alpha \cdot L}{2}\right) - \sin\left(\frac{\alpha \cdot L}{2}\right)\right]$$

Damit ergeben sich zwei Eigenwertgleichungen:

$$\Rightarrow 1) \quad 0 = \sin\left(\frac{\alpha \cdot L}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 2) \quad 0 = \frac{\alpha \cdot L}{2} \cdot \cos\left(\frac{\alpha \cdot L}{2}\right) - \sin\left(\frac{\alpha \cdot L}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \tan\left(\frac{\alpha \cdot L}{2}\right) = \frac{\alpha \cdot L}{2}$$

mit den Eigenwerten:

$$1) \quad \alpha_1 = \frac{2 \cdot n \cdot \pi}{L} \quad \text{mit} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$2) \quad \tan\left(\frac{\alpha_2 \cdot L}{2}\right) = \frac{\alpha_2 \cdot L}{2}$$

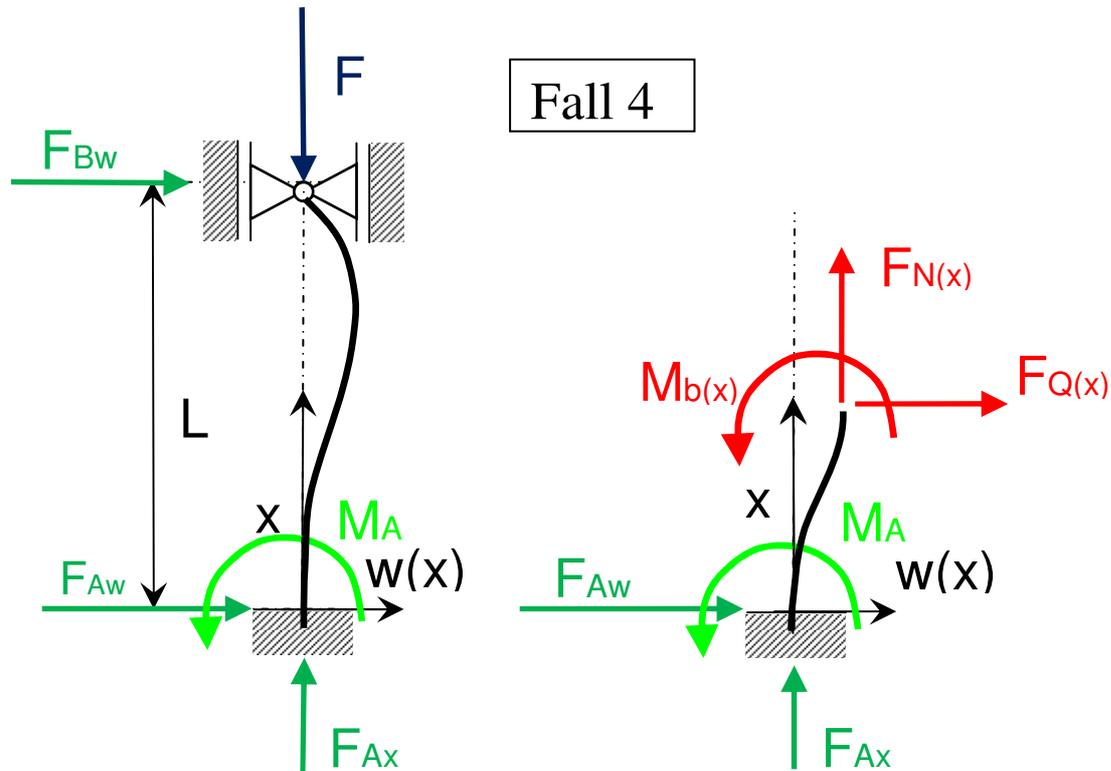
Da der Eigenwert 1) hier im Vergleich den (ersten) kleineren Eigenwert liefern wird, muss diese Bestimmungsgleichung die kritische Knicklast liefern.

Eulersche Knicklast F_{E3} für den 3. Knickfall ($n = 1$):

$$\underline{\underline{F_{E3} = \frac{4 \cdot \pi^2}{L^2} \cdot E \cdot I}}$$

Fall 4:

Die Schnittlasten und Auflagerreaktionen:



$$\begin{aligned}
 F_{Ax} &= F & F_{N(x)} &= -F \\
 F_{Aw} &= -F_{Bw} & M_{b(x)} &= F_{Ax} \cdot w(x) - F_{Aw} \cdot x - M_A \\
 M_A &= F_{Bw} \cdot L & &= F_{Ax} \cdot w(x) + F_{Bw} \cdot x - F_{Bw} \cdot L
 \end{aligned}$$

Das führt auf die folgende inhomogene Differentialgleichung:

$$w''(x) + \alpha^2 \cdot w(x) = \frac{F_{Bw} \cdot (L-x)}{E \cdot I} \quad \text{mit} \quad \alpha^2 = \frac{F}{E \cdot I}$$

mit der allgemeinen Lösung:

$$w(x) = C_1 \cdot \sin(\alpha \cdot x) + C_2 \cdot \cos(\alpha \cdot x) + \frac{F_{Bw} \cdot (L-x)}{E \cdot I}$$

und der ersten Ableitung: (wird benötigt für die Randbedingung an der Einspannstelle)

$$w'(x) = C_1 \cdot \alpha \cdot \cos(\alpha \cdot x) - C_2 \cdot \alpha \cdot \sin(\alpha \cdot x) - \frac{F_{Bw}}{E \cdot I}$$

Randbedingungen:

$$w(0) = 0 = C_2 \cdot \cos(\alpha \cdot 0) + \frac{F_{Bw} \cdot L}{E \cdot I} \Rightarrow C_2 = -\frac{F_{Bw} \cdot L}{E \cdot I}$$

$$w'(0) = 0 = C_1 \cdot \alpha \cdot \cos(\alpha \cdot 0) - \frac{F_{Bw}}{E \cdot I} \Rightarrow C_1 = \frac{F_{Bw}}{\alpha \cdot E \cdot I}$$

$$w(L) = 0 = \frac{F_{Bw}}{\alpha \cdot E \cdot I} \cdot \sin(\alpha \cdot L) - \frac{F_{Bw} \cdot L}{E \cdot I} \cdot \cos(\alpha \cdot L) + \frac{F_{Bw} \cdot (0)}{E \cdot I}$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{F_{Bw}}{E \cdot I} \cdot \left[\frac{1}{\alpha} \cdot \sin(\alpha \cdot L) - L \cdot \cos(\alpha \cdot L) \right]$$

$$\Rightarrow 0 = \left[\frac{1}{\alpha} \cdot \sin(\alpha \cdot L) - L \cdot \cos(\alpha \cdot L) \right]$$

Damit ergibt sich die Eigenwertgleichung:

$$\Rightarrow \frac{1}{\alpha} \cdot \sin(\alpha \cdot L) = L \cdot \cos(\alpha \cdot L)$$

$$\Rightarrow \tan(\alpha \cdot L) = \alpha \cdot L$$

$$\alpha \cdot L = 4,4934\dots$$

mit dem ersten Eigenwert:

$$(\alpha \cdot L)^2 = \frac{F \cdot L^2}{E \cdot I} = 20,1906\dots$$

Eulersche Knicklast F_{E4} für den 4. Knickfall:

$$F_{E4} = \frac{20,1906}{L^2} \cdot E \cdot I$$

$$F_{E4} = \frac{\pi^2}{0,699^2 \cdot L^2} \cdot E \cdot I$$

Damit wären alle Werte für die vier Eulerschen Knicklasten vorhanden. Diese lassen sich nun elegant tabellarisch zusammenfassen, wobei die Stablänge nun auf eine reduzierte Knicklänge L_k bezogen wird.

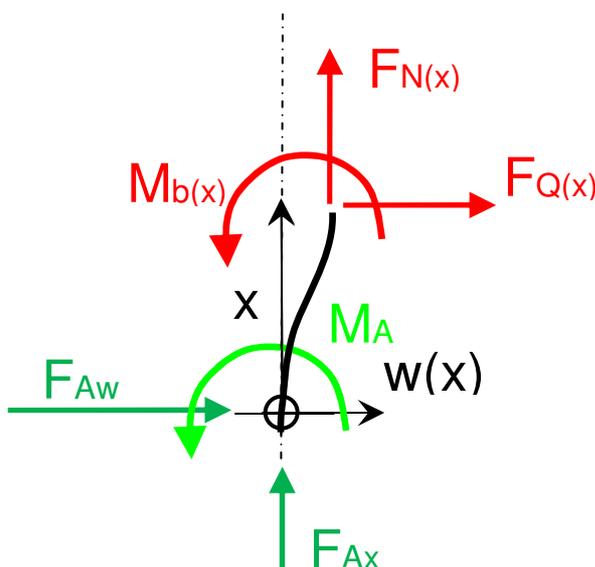
$$F_E = \frac{\pi^2}{L_k^2} \cdot E \cdot I$$

mit:	Fall 1:	$L_k = L$	Fall 3:	$L_k = L/2$
	Fall 2:	$L_k = 2 L$	Fall 4:	$L_k = 0,699 L$

1.3 Knicklastbestimmung allein aus den Randbedingungen der elastischen Linie:

Im vorangegangenen Abschnitt konnte ein Gleichungssystem erstellt werden und mittels den Gleichgewichtsbedingungen der Kräfte und Momente Informationen zur Lösung des Problems herangezogen werden. Durch die Berücksichtigung der Schnittlastmomente $M_{b(x)}$ war es möglich gewesen, einen Bezug zu der 2. Ableitung der elastischen Linie herzustellen. Es ist aber auch möglich, rein über die analytische Kurvenbetrachtung der Biegelinie zu einem Gleichungssystem zu kommen, mit welchem die Knicklast gefunden werden kann. Dazu wird erst einmal eine allgemeine Gleichgewichtsbeschreibung für die 4 Knickfälle aufgestellt.

allgemeiner Fall



$$\frac{-M_{b(x)}}{E \cdot I_{(x)}} = w''(x) \quad \text{und} \quad M_{b(x)} = -M_A - F_{N(x)} \cdot w(x) + F_{Q(x)} \cdot x$$

$$-w''(x) \cdot E \cdot I = -M_A - F_{N(x)} \cdot w(x) + F_{Q(x)} \cdot x$$

Durch zweimaliges Differenzieren der Biegemomentengleichung stoßen wir dann auf folgende Form:

$$-w'''(x) \cdot E \cdot I = -F_{N(x)} \cdot w'(x) = F \cdot w'(x)$$

$$w'''(x) + \frac{F}{E \cdot I} \cdot w'(x) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \underline{\underline{w'''(x) + \alpha^2 \cdot w'(x) = 0}} \quad \text{mit} \quad \alpha^2 = \frac{F}{E \cdot I}$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung lautet dann:

$$w(x) = C_1 \cdot \sin(\alpha \cdot x) + C_2 \cdot \cos(\alpha \cdot x) + C_3 \cdot x + C_4$$

mit der ersten und zweiten Ableitung:

$$w'(x) = C_1 \cdot \alpha \cdot \cos(\alpha \cdot x) - C_2 \cdot \alpha \cdot \sin(\alpha \cdot x) + C_3$$

$$w''(x) = -C_1 \cdot \alpha^2 \cdot \sin(\alpha \cdot x) - C_2 \cdot \alpha^2 \cdot \cos(\alpha \cdot x)$$

Um für sämtliche Knickfälle die Randbedingungen der Biegelinie zu berücksichtigen, sollen diese in ihrer Verschiedenheit schon mal alle vorab aufgeführt werden.

$$Gl.1: \quad w(0) = 0 = C_2 + C_4$$

$$Gl.2: \quad w(L) = 0 = C_1 \cdot \sin(\alpha \cdot L) + C_2 \cdot \cos(\alpha \cdot L) + C_3 \cdot L + C_4$$

$$Gl.3: \quad w'(0) = 0 = C_1 \cdot \alpha + C_3$$

$$Gl.4: \quad w'(L) = 0 = C_1 \cdot \alpha \cdot \cos(\alpha \cdot L) - C_2 \cdot \alpha \cdot \sin(\alpha \cdot L) + C_3$$

$$Gl.5: \quad w''(0) = 0 = -C_2 \cdot \alpha^2$$

$$Gl.6: \quad w''(L) = 0 = -C_1 \cdot \alpha^2 \cdot \sin(\alpha \cdot L) - C_2 \cdot \alpha^2 \cdot \cos(\alpha \cdot L)$$

Betrachtung Fall 1:

Hier müssen die Gleichungen Gl.1 / 2 / 5 / 6 zur Anwendung kommen. Die Gleichungen Gl.5 und Gl.6 beschreiben dabei die Tatsache, dass an den Stabrändern Momentenfreiheit herrscht, als keine festen Einspannstellen vorliegen.

Das führt auf ein lineares System von algebraischen Gleichungen, deren zugehörige Determinante K verschwinden muss ($\text{Det}[K] = 0$), weil die Randbedingungen stets den Wert Null liefern. (siehe Gl.1...6)

Mit dem ersten Knickfall resultiert daher folgende Determinante:

$$\text{Det}[K_1] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \sin(\alpha \cdot L) & \cos(\alpha \cdot L) & L & 1 \\ 0 & -\alpha^2 & 0 & 0 \\ -\alpha^2 \cdot \sin(\alpha \cdot L) & -\alpha^2 \cdot \cos(\alpha \cdot L) & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Da die Determinante verschwinden muss, können die folgenden zwei Regeln zur Anwendung kommen, um die innere Struktur der Determinante neu zu ordnen. Ziel ist es, die 4x4-Matrix auf eine 3x3-Matrix zu reduzieren.

Regel 1: Die Zeilen der Determinante können gegenseitig vertauscht werden

Regel 2: Zu einer Zeile kann das Vielfache einer andere Zeile addiert werden

Wichtig: Regeln gelten hier nur, weil die Determinante Null ergeben soll!

Vertauschen wir nun hier die beiden ersten Zeilen, dann haben wir eine Reihe mit drei Nullen unter dem L. Damit kann die Determinante weiter reduziert werden.

$$\text{Det}[K^*_1] = \begin{vmatrix} \sin(\alpha \cdot L) & \cos(\alpha \cdot L) & L & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -\alpha^2 & 0 & 0 \\ -\alpha^2 \cdot \sin(\alpha \cdot L) & -\alpha^2 \cdot \cos(\alpha \cdot L) & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{Det}[K^*_1] = L \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -\alpha^2 & 0 \\ -\alpha^2 \cdot \sin(\alpha \cdot L) & -\alpha^2 \cdot \cos(\alpha \cdot L) & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Durch die Nullelemente der Determinante reduziert sich der Ausdruck weiter auf:

$$\text{Det}[K^*_1] = L \cdot [-\alpha^2 \cdot \sin(\alpha \cdot L)] \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -\alpha^2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{Det}[K^*_1] = L \cdot [-\alpha^2 \cdot \sin(\alpha \cdot L)] \cdot \alpha^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\sin(\alpha \cdot L) = 0}}$$

Eigenwerte: $\alpha = \frac{n \cdot \pi}{L} \quad \text{mit} \quad n = 1, 2, 3, \dots$

Wie man sieht, ergibt sich dieselbe Bestimmungsgleichung wie im Abschnitt 1.2 auf Seite 7.
Betrachtung Fall 2:

Hier müssen die Gleichungen Gl.1 / 3 / 6 zur Anwendung kommen. Da noch eine Gleichung fehlt, um die vierte Konstante bestimmen zu können, müssen wir doch noch einen kleinen Blick auf die vorliegende Schnittlastbedingung von Fall 2) werfen.

$$M_{b(x)} = F \cdot (w(x) - w(L)) = -w''(x) \cdot E \cdot I$$

Differenziert man diesen Ausdruck noch einmal, dann folgt die Beziehung:

$$F \cdot w'(x) = -w'''(x) \cdot E \cdot I \quad \text{bzw.} \quad w'''(x) + \alpha^2 \cdot w'(x) = 0$$

$$\text{mit } w'''(x) = -C_1 \cdot \alpha^3 \cdot \cos(\alpha \cdot x) + C_2 \cdot \alpha^3 \cdot \sin(\alpha \cdot x)$$

$$\text{und } w'(x) = C_1 \cdot \alpha \cdot \cos(\alpha \cdot x) - C_2 \cdot \alpha \cdot \sin(\alpha \cdot x) + C_3$$

Für $x = L$ resultiert damit die Randbedingungsgleichung:

$$\text{Gl.7} \quad w'''(L) + \alpha^2 \cdot w'(L) = 0 = C_3$$

Mit dem zweiten Knickfall resultiert daher folgende Determinante:

$$\text{Det}[K_2] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \alpha & 0 & 1 & 0 \\ -\alpha^2 \cdot \sin(\alpha \cdot L) & -\alpha^2 \cdot \cos(\alpha \cdot L) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{Det}[K_2^*] = 1 \cdot \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ -\alpha^2 \cdot \sin(\alpha \cdot L) & -\alpha^2 \cdot \cos(\alpha \cdot L) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{Det}[K_2^*] = \alpha \cdot [-\alpha^2 \cdot \cos(\alpha \cdot L)] = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\cos(\alpha \cdot L) = 0}}$$

Eigenwerte: $\alpha = (2 \cdot n - 1) \frac{\pi}{2 \cdot L}$ mit $n = 1, 2, 3, \dots$

Wiederum wird die Bestimmungsgleichung aus Abschnitt 1.2 bestätigt.

Betrachtung Fall 3:

Hier müssen die Gleichungen Gl.1 / 2 / 3 / 4 zur Anwendung kommen.
Mit dem dritten Knickfall resultiert daher folgende Determinante:

$$\text{Det}[K_3] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \sin(\alpha \cdot L) & \cos(\alpha \cdot L) & L & 1 \\ \alpha & 0 & 1 & 0 \\ \alpha \cdot \cos(\alpha \cdot L) & -\alpha \cdot \sin(\alpha \cdot L) & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{Det}[K_3^*] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \sin(\alpha \cdot L) & \cos(\alpha \cdot L) - 1 & L & 0 \\ \alpha & 0 & 1 & 0 \\ \alpha \cdot \cos(\alpha \cdot L) & -\alpha \cdot \sin(\alpha \cdot L) & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{Det}[K_3^*] = 1 \cdot \begin{vmatrix} \sin(\alpha \cdot L) & \cos(\alpha \cdot L) - 1 & L \\ \alpha & 0 & 1 \\ \alpha \cdot \cos(\alpha \cdot L) & -\alpha \cdot \sin(\alpha \cdot L) & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Det}[K_3^*] &= (\cos(\alpha \cdot L) - 1) \cdot \alpha \cdot \cos(\alpha \cdot L) + L \cdot \alpha \cdot (-\alpha \cdot \sin(\alpha \cdot L)) - \\ &\quad - (\cos(\alpha \cdot L) - 1) \cdot \alpha - \sin(\alpha \cdot L) \cdot (-\alpha \cdot \sin(\alpha \cdot L)) = 0 \\ &= (\cos(\alpha \cdot L) - 1)^2 \cdot \alpha - \alpha \cdot \sin(\alpha \cdot L) \cdot (L \cdot \alpha - \sin(\alpha \cdot L)) = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 0 = \cos^2(\alpha \cdot L) - 2 \cdot \cos(\alpha \cdot L) + 1 - L \cdot \alpha \cdot \sin(\alpha \cdot L) + \sin^2(\alpha \cdot L)$$

$$\Rightarrow 0 = 2 \cdot (1 - \cos(\alpha \cdot L)) - L \cdot \alpha \cdot \sin(\alpha \cdot L)$$

Das ist nun dieselbe Ausgangsgleichung wie [III.] auf Seite 11. D.h., die Bestimmungsgleichung führt wiederum auf die Eigenwerte:

$$1) \quad \alpha_1 = \frac{2 \cdot n \cdot \pi}{L} \quad \text{mit} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$2) \quad \tan\left(\frac{\alpha_2 \cdot L}{2}\right) = \frac{\alpha_2 \cdot L}{2}$$

Wobei für diesen Knickfall der Eigenwert zu 1) gilt, für $n = 1$.

Betrachtung Fall 4:

Hier müssen die Gleichungen Gl.1 / 2 / 3 / 6 zur Anwendung kommen. Mit dem dritten Knickfall resultiert daher folgende Determinante:

$$\text{Det}[K_4] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \sin(\alpha \cdot L) & \cos(\alpha \cdot L) & L & 1 \\ \alpha & 0 & 1 & 0 \\ -\alpha^2 \cdot \sin(\alpha \cdot L) & -\alpha^2 \cdot \cos(\alpha \cdot L) & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{Det}[K_4^*] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \sin(\alpha \cdot L) & \cos(\alpha \cdot L) - 1 & L & 0 \\ \alpha & 0 & 1 & 0 \\ -\alpha^2 \cdot \sin(\alpha \cdot L) & -\alpha^2 \cdot \cos(\alpha \cdot L) & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{Det}[K_4^*] = 1 \cdot \begin{vmatrix} \sin(\alpha \cdot L) & \cos(\alpha \cdot L) - 1 & L \\ \alpha & 0 & 1 \\ -\alpha^2 \cdot \sin(\alpha \cdot L) & -\alpha^2 \cdot \cos(\alpha \cdot L) & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{Det}[K_4^*] = (\cos(\alpha \cdot L) - 1) \cdot (-\alpha^2 \cdot \sin(\alpha \cdot L)) + L \cdot \alpha \cdot (-\alpha^2 \cdot \cos(\alpha \cdot L)) - \sin(\alpha \cdot L) \cdot (-\alpha^2 \cdot \cos(\alpha \cdot L)) = 0$$

$$\Rightarrow 0 = \cos(\alpha \cdot L) \cdot \sin(\alpha \cdot L) - \sin(\alpha \cdot L) + L \cdot \alpha \cdot \cos(\alpha \cdot L) - \cos(\alpha \cdot L) \cdot \sin(\alpha \cdot L)$$

$$\Rightarrow 0 = L \cdot \alpha \cdot \cos(\alpha \cdot L) - \sin(\alpha \cdot L)$$

$$\Rightarrow L \cdot \alpha = \tan(\alpha \cdot L)$$

$$\alpha \cdot L = 4,4934\dots$$

mit dem ersten Eigenwert:

$$(\alpha \cdot L)^2 = \frac{F \cdot L^2}{E \cdot I} = 20,1906\dots$$

Auch beim vierten Knickfall bestätigt sich die Herleitung des Eigenwertes, so wie es schon auf Seite 13 geschehen ist. Es ist also auch mit dieser Methode möglich, die kritischen Drucklasten der Eulerschen Knickfälle zu finden, wenn man über die Randbedingung der elastischen Linie geht, welche sich an den Auflager- und Einspannstellen ergeben würden.

Um noch eine weitere Methode ins Feld zu führen, soll nun mit dem folgenden Abschnitt noch die Anwendung der Energiemethode zur Sprache kommen.

1.4 Knicklastbestimmung über die Energiemethode:

An einem elastisch verformten System besteht aufgrund der Energieerhaltungssätze natürlich auch die Möglichkeit, die in ein Bauteil vorliegende inneren Verformungsenergien mit den außen verrichteten Arbeiten der Randlasten (Kräfte oder Momente) in Beziehung zu setzen. Ein im Gleichgewicht befindliches System kann daher beispielsweise das Prinzip verfolgen, dass die Summe aller inneren und äußeren Energien konstant bleibt. Es kann aber auch das Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie Π (elastisches Potential) genutzt werden, das in der Elastizitätslehre folgende Aussage hat:

$$\Pi = \Pi_i - \Pi_a = \text{Extremum}$$

pot. Energie des Gesamtsystems = innere Formänderungsenergie – Arbeit der äußeren Lasten

Da für das Gesamtsystem bei einer stabilen Gleichgewichtslage als Extremum ein Minimum vorliegt, bedeutet das für die Variation des Potentials:

$$\delta \Pi = \delta (\Pi_i - \Pi_a) = 0$$

Bei dem Beispiel der Knickstäbe wollen wir davon ausgehen, dass es einen Grundzustand Π_g gibt, der vor Eintritt der Instabilität sich noch im Gleichgewicht befindet. Hingegen soll Π dann der Zustand sein, der beim Wechsel von der Stabilität in die Instabilität vorliegt, wenn also eine allzu kleine Störung (Variation) das System zum Kippen bringt. Um die Potentialgleichung dafür ableiten zu können, soll uns hier die Taylor-Reihenentwicklung gute Dienste leisten.

$$f(x_0 + \varepsilon) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \varepsilon + \frac{1}{2} \cdot f''(x_0) \cdot \varepsilon^2 + \dots + \frac{1}{n!} \cdot f^{(n)}(x_0) \cdot \varepsilon^n + R_n(\varepsilon)$$

Da in diesem Fall das ε eine sehr kleine Größe darstellen soll, können die anschließenden Glieder dieser Reihe nach der zweiten Ableitung von $f(x_0)$ als vernachlässigbar gelten.

Wenn nun $f(x_0)$ für den Grundzustand steht, dann wäre das in unserem Fall die triviale Gleichgewichtslage des Systems mit dem Grundpotential Π_g . Das Potential der nichttrivialen Gleichgewichtslage Π errechnet sich nun mittels der zur Hilfe genommenen Taylor-Reihe (mit der zweiten Variation von Π_g) zu:

$$\Pi = \Pi_g + \delta \Pi_g + \frac{1}{2} \cdot \delta^2 \Pi_g$$

Gehen wir vereinfacht davon aus, dass der Stab in seiner Längsachse keine Verformung erleidet (nicht zusammendrückbare Stabachse), dann wirkt im Grundzustand Π_g die Kraft F direkt in die Stabachse und verrichtet keine Arbeit, somit ist $\delta \Pi_g = 0$.

Da sich außerdem das System (im Grundzustand) im Gleichgewicht befindet, gilt zudem:

$$\delta \Pi_g = 0$$

Somit erhalten wir für die nichttriviale Gleichgewichtslage das Potential:

$$\Pi = \frac{1}{2} \cdot \delta^2 \Pi_g$$

Im Zustand des momentan gerade noch im Gleichgewicht befindlichen Systems gilt wiederum die Aussage der indifferenten nichttrivialen Gleichgewichtslage mit:

$$\delta \Pi = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\delta \left(\delta^2 \Pi_g \right) = 0}}$$

Das ist das Stabilitätskriterium für den Grundzustand, wenn das stabile System in die Instabilität wechselt, also im Fall des Knickstabes, wenn die kritische Knicklast F_k erreicht wird.

Kommen wir daher zu den einzelnen Potentialen, die sich am Knickstab einstellen werden. Dazu soll der erst einmal der Knickfall 1) zur Anschauung dienen. Es liegt eine äußere Kraft F an (konstant von Anbeginn), die entlang des verformten Stab an jeder Stelle x vorliegt, demzufolge eine äußere Arbeit am System verrichtet. Die Arbeit verrichtende Wegstrecke lässt sich als Differenz aus der Stablänge L und dem Linienintegral des verformten Stabes berechnen. Dabei soll vorausgesetzt werden, dass die Deformation (elastische Linie) des Stabes sehr gering ist. Da der Zustand der indifferenten Gleichgewichtslage zur Diskussion steht, kann diese Annahme so zugelassen werden.

Knickfall 1):

$$\Pi_a = \int_0^L F \cdot \left(\sqrt{1 + w'^2(x)} - 1 \right) \cdot dx \quad \text{wobei} \quad \sqrt{1 + w'^2(x)} \approx 1 + \frac{1}{2} \cdot w'^2(x) \quad , \quad \text{weil } w'^2(x) \ll 1$$

$$\Rightarrow \quad \Pi_a = \frac{1}{2} \cdot \int_0^L F \cdot w'^2(x) \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot F \cdot \int_0^L w'^2(x) \cdot dx \quad , \quad \text{weil } F = \text{const.}$$

Kommen wir somit zu der inneren Verformungsarbeit des Biegestabes. Da wiederum die Verformungen der elastischen Linie sehr klein sein sollen, dürfen wir die zweite Ableitung der Biegelinie direkt mit den Biegemomenten in Beziehung setzen.

$$\frac{-M_{b(x)}}{E \cdot I_{(x)}} = w''(x)$$

Die innere Verformungsenergie ist gegeben mit:

$$\Pi_i = \frac{1}{2 \cdot E \cdot I} \cdot \int_0^L M_{b(x)}^2 \cdot dx \quad \Rightarrow \quad \Pi_i = \frac{E \cdot I}{2} \cdot \int_0^L w''^2(x) \cdot dx$$

Für die potentiellen Energie Π des Gesamtsystems ergibt sich dann:

$$\Pi = \Pi_i - \Pi_a = \frac{1}{2} \cdot \left[E \cdot I \cdot \int_0^L w''^2(x) \cdot dx - F \cdot \int_0^L w'^2(x) \cdot dx \right]$$

„Potential der nichttrivialen Gleichgewichtslage des Stabes“ – Knickfall 1)

In den Fällen der Knickstäbe haben wir eine Besonderheit, die an dieser Stelle noch genutzt werden kann, weil die beiden Potentiale Π_i und Π_a sich gegenseitig aufheben, also die innere Verformungsenergie gleich der verrichteten Arbeit außen ist.

$$\Pi = \Pi_i - \Pi_a = 0$$

$$0 = \frac{1}{2} \cdot \left[E \cdot I \cdot \int_0^L w''^2(x) \cdot dx - F \cdot \int_0^L w'^2(x) \cdot dx \right] \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{F_K = E \cdot I \cdot \frac{\int_0^L w''^2(x) \cdot dx}{\int_0^L w'^2(x) \cdot dx}}}$$

Mit dem Verschwinden des Potentials kann also direkt die kritische Druckkraft F_K aus dieser Gleichung berechnet werden, wobei hier noch die offene Frage im Raume steht, welche Biegelinie $w(x)$ in der Gleichung zur Anwendung kommt.

Für den Knickfall 1) setzen wir daher zur Probe erst einmal die Lösungsgleichung der Biegelinie ein, die schon auf Seite 7 zur Sprache kam. Diese eingesetzt als Ansatzfunktion in die obige Gleichung für die hier angegebene Knickkraft müsste schlussendlich dazu führen, dass die Gleichung erfüllt und bestätigt wird.

$$w(x) = C_1 \cdot \sin(\alpha \cdot x) + C_2 \cdot \cos(\alpha \cdot x) \quad \text{wobei bei Fall 1) } C_2 = 0$$

$$w_l(x) = C_1 \cdot \sin(\alpha \cdot x)$$

$$w_1'(x) = C_1 \cdot \alpha \cdot \cos(\alpha \cdot x) \quad w_1''(x) = C_1^2 \cdot \alpha^2 \cdot \cos^2(\alpha \cdot x)$$

$$w_1''(x) = -C_1 \cdot \alpha^2 \cdot \sin(\alpha \cdot x) \quad w_1'''(x) = C_1^2 \cdot \alpha^4 \cdot \sin^2(\alpha \cdot x)$$

$$F_K = E \cdot I \cdot \frac{\int_0^L w_1''(x) \cdot dx}{\int_0^L w_1'(x) \cdot dx} \Rightarrow F_K = E \cdot I \cdot \frac{C_1^2 \cdot \alpha^4 \cdot \frac{1}{2\alpha} [\alpha \cdot x - \sin(\alpha \cdot x) \cdot \cos(\alpha \cdot x)]_0^L}{C_1^2 \cdot \alpha^2 \cdot \frac{1}{2\alpha} [\alpha \cdot x + \sin(\alpha \cdot x) \cdot \cos(\alpha \cdot x)]_0^L}$$

$$F_K = E \cdot I \cdot \frac{\alpha^2 [\alpha \cdot L - \sin(\alpha \cdot L) \cdot \cos(\alpha \cdot L)]}{[\alpha \cdot L + \sin(\alpha \cdot L) \cdot \cos(\alpha \cdot L)]}$$

Da die gewählte Ansatzfunktion den Randbedingungen genügen muss, bedeutet das für den Knickfall 1), dass bei $x = L$ die Durchbiegung $w(0) = 0$ sein muss, also $\sin(\alpha L) = 0$ ist! Dadurch reduziert sich die Gleichungsform zu:

$$F_K = E \cdot I \cdot \frac{\alpha^2 [\alpha \cdot L]}{[\alpha \cdot L]} = E \cdot I \cdot \alpha^2 \quad q.e.d.$$

Hier bestätigt sich die Definition von α^2 von Seite 7. Die Eigenwerte für αL ergeben sich mit der Erfüllung der Randbedingung $\sin(\alpha L) = 0$.

Betrachtet man sich nun neben Fall 1) noch die anderen Knickfälle, dann können sofort auch die Fälle 3) und 4) für die hier abgeleitete Gleichung zugeordnet werden. Bei Knickfall 2) ist noch das seitliche Ausbrechen des Stabes zu berücksichtigen. Da wir aber mit dem Eintritt der Instabilität ($F = F_K$) am Stab noch keinerlei Querkräfte vorliegen haben, die eine Arbeit am System verrichten könnten, gilt die Gleichung für alle 4 Knickfälle.

$$F_{K1..4} = E \cdot \frac{\int_0^L I(x) \cdot w_1''(x) \cdot dx}{\int_0^L w_1'(x) \cdot dx}$$

Dieses Verhältnis wird allgemein als Rayleighscher Quotient bezeichnet. Der Vorteil bei dieser Gleichung besteht darin, dass man nun auch über angenäherte Ansatzfunktionen von $w(x)$ eine Näherungsformel für die Knicklast vorliegen hat. Das könnte in dem Fall sein, wenn beispielsweise die Querschnitte entlang der Stabachse nicht konstant sind, also sich kontinuierlich ändern [$I = I(x)$] oder sogar Sprünge machen (bei Wellenabsätzen). Dann lässt sich die Biegelinie nicht mehr so einfach und direkt angeben.

Hiermit eröffnet sich dann aber die Ritzsche-Methode, bei der entsprechende Näherungslösungen angesetzt werden, die aber den Randbedingungen genügen müssen. Das kann auch eine Summe aus mehreren Ansatzfunktionen sein, zu welchen dann ein

Gleichungssystem erstellt wird. Denn zu jeder Näherungsfunktion $w_i(x)$ wird es demnach unbestimmte Ansatzkoeffizienten C_i geben, die durch die Variation dieses Parameters bestimmt werden können.

$$w(x) = \sum_{i=1}^n C_i \cdot w_i(x)$$

Für das Problem der Knickstäbe gilt folgende Aussage zum Potential Π :

$$\delta \Pi = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta \left(\delta^2 \Pi_g \right) = 0$$

Mit der Variation der Konstanten liefert die Extremalbedingung des Potentials P die Möglichkeit, ein Gleichungssystem aufzustellen:

$$\Pi = \Pi_i - \Pi_a = \frac{1}{2} \cdot \left[E \cdot I \cdot \int_0^L w''^2(x) \cdot dx - F \cdot \int_0^L w'^2(x) \cdot dx \right] = \text{Extremal}$$

$$\delta \Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial C_i} \cdot \delta C_i = 0 \quad \text{mit} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

Man nennt dieses System aus Gleichungen die "Ritzschen Gleichungen", die aus folgender Aussage erzeugt werden:

$$\Rightarrow \frac{\partial \Pi}{\partial C_i} = 0 \quad \text{mit} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

Das Potential Π besitzt daher eine funktionale Abhängigkeit hinsichtlich der "variablen" Koeffizienten, die zu einem Gleichungssystem führen.

$$\Pi = \Pi(C_1, C_2, \dots, C_n)$$

Zur Bestätigung der Energiemethode sollen nun noch weitere Knickfälle durchgerechnet werden, wobei beim Knickfall 2) die Lösungsgleichung aus dem Abschnitt 1.2 herangezogen werden soll, beim Knickfall 3) noch einmal dieselbe Ansatzfunktion durchgespielt wird und bei 4) abschließend eine Näherungslösung (Polynom 3. Grades) zur Hilfe genommen wird.

Berechnung der Knickfälle mittels der Formel von Seite 22:

$$0 = \frac{1}{2} \cdot \left[E \cdot I \cdot \int_0^L w''^2(x) \cdot dx - F \cdot \int_0^L w'^2(x) \cdot dx \right] \quad \Rightarrow \quad F_K = E \cdot I \cdot \frac{\int_0^L w''^2(x) \cdot dx}{\int_0^L w'^2(x) \cdot dx}$$

Ansatzfunktion für Fall 2):

$$w(x) = C_2 \cdot \cos(\alpha \cdot x) + C_3$$

$$w'(x) = -C_2 \cdot \alpha \cdot \sin(\alpha \cdot x) \quad \Rightarrow \quad w'^2(x) = C_2^2 \cdot \alpha^2 \cdot \sin^2(\alpha \cdot x)$$

$$w''(x) = -C_2 \cdot \alpha^2 \cdot \cos(\alpha \cdot x) \quad \Rightarrow \quad w''^2(x) = C_2^2 \cdot \alpha^4 \cdot \cos^2(\alpha \cdot x)$$

Da keine Biegemomente an der Endstelle $x = L$ vorliegen sollen, gilt die Randbedingung:

$$w''(L) = 0 = -C_2 \cdot \alpha^2 \cdot \cos(\alpha \cdot L) \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{2 \cdot L}$$

Dabei sei α hier mit dem kleinsten Eigenwert angegeben, der uns zur Lösung bzw. Bestätigung der Energiemethode führt.

$$F_K = E \cdot I \cdot \frac{\int_0^L w''^2(x) \cdot dx}{\int_0^L w'^2(x) \cdot dx} = E \cdot I \cdot \frac{C_2^2 \cdot \alpha^4 \left[\frac{x}{2} + \frac{1}{4\alpha} \cdot \sin^2(2\alpha \cdot x) \right]_0^L}{C_2^2 \cdot \alpha^2 \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{4\alpha} \cdot \sin^2(2\alpha \cdot x) \right]_0^L}$$

$$F_K = E \cdot I \cdot \frac{C_2^2 \cdot \alpha^4 \left[\frac{L}{2} + \frac{1}{4\alpha} \cdot \sin^2(2\alpha \cdot L) \right]}{C_2^2 \cdot \alpha^2 \left[\frac{L}{2} - \frac{1}{4\alpha} \cdot \sin^2(2\alpha \cdot L) \right]} = E \cdot I \cdot \frac{\alpha^2 \left[\frac{L}{2} + 0 \right]}{\left[\frac{L}{2} - 0 \right]} = E \cdot I \cdot \alpha^2 = E \cdot I \cdot \left(\frac{\pi}{2 \cdot L} \right)^2$$

$$F_K = \frac{E \cdot I}{L^2} \cdot \left(\frac{\pi^2}{4} \right) \quad \text{q.e.d.}$$

Ansatzfunktion für Fall 3):

Wir nehmen hier dieselbe Ansatzfunktion wie im vorherigen Fall, weil diese Funktion ebenfalls den Randbedingungen für den Knickfall 3) genügen kann.

$$w(x) = C_2 \cdot \cos(\alpha \cdot x) + C_3$$

$$w'(x) = -C_2 \cdot \alpha \cdot \sin(\alpha \cdot x) \quad \Rightarrow \quad w'^2(x) = C_2^2 \cdot \alpha^2 \cdot \sin^2(\alpha \cdot x)$$

$$w''(x) = -C_2 \cdot \alpha^2 \cdot \cos(\alpha \cdot x) \quad \Rightarrow \quad w''^2(x) = C_2^2 \cdot \alpha^4 \cdot \cos^2(\alpha \cdot x)$$

Da an den Endstellen $x=0$ und $x=L$ Einspannungen vorliegen, gelten die Randbedingungen:

$$w(0) = 0 = C_2 \cdot \cos(\alpha \cdot 0) + C_3 = C_2 + C_3$$

$$w(L) = 0 = C_2 \cdot \cos(\alpha \cdot L) + C_3$$

$$w'(L) = 0 = -C_2 \cdot \alpha \cdot \sin(\alpha \cdot L) \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{2 \cdot \pi}{L}$$

Dabei sei α wiederum mit dem kleinsten Eigenwert angegeben, der uns zur Lösung führen soll. Wir treffen also sofort auf die Aussage:

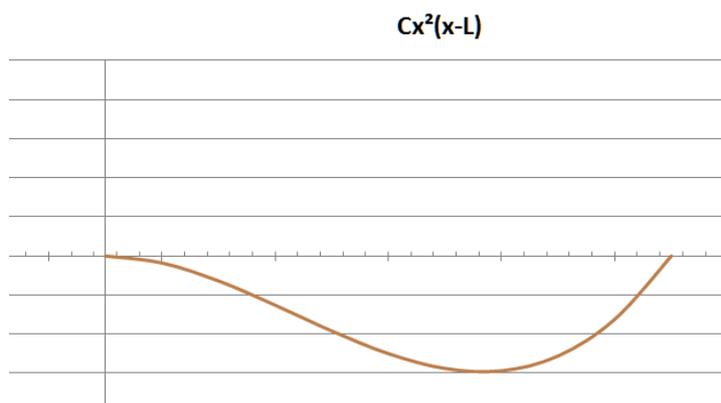
$$F_K = \frac{E \cdot I}{L^2} \cdot \alpha^2 = \frac{E \cdot I}{L^2} \cdot 4\pi^2$$

Das ist ebenfalls genau die hergeleitete Eulersche Knicklast aus dem Abschnitt 1.2.

Für den letzten Knickfall soll nun eine Ansatzfunktion gewählt werden, die etwas von der Lösungsgleichung abweicht, aber dennoch den Charakter der Biegelinie entspricht und weitestgehend die Randbedingungen erfüllt. Hier bietet sich ein Polynom 3. Grades an, dessen Kurvenverlauf eine doppelte Nullstelle im Punkt 0/0 hat und die x-Achse wie gefordert bei der Stelle $x = L$ schneidet.

Ansatzfunktion für Fall 4):

$$w(x) = C \cdot x^2 \cdot (x - L)$$



$$w'(x) = C \cdot (3 \cdot x^2 - 2 \cdot L \cdot x) \quad \Rightarrow \quad w''(x) = C^2 \cdot (9 \cdot x^4 - 12 \cdot L \cdot x^3 + 4 \cdot L^2 \cdot x^2)$$

$$w''(x) = C \cdot (6 \cdot x - 2 \cdot L) \quad \Rightarrow \quad w'''(x) = C^2 \cdot (36 \cdot x^2 - 24 \cdot L \cdot x + 4 \cdot L^2)$$

$$F_K = E \cdot I \cdot \frac{\int_0^L w'''(x) \cdot dx}{\int_0^L w''(x) \cdot dx} = E \cdot I \cdot \frac{C^2 \left[\frac{36}{3} x^3 - \frac{24}{2} L x^2 + 4 L^2 x \right]_0^L}{C^2 \left[\frac{9}{5} x^5 - \frac{12}{4} L x^4 + \frac{4}{3} L^2 x^3 \right]_0^L}$$

$$F_K = E \cdot I \cdot \frac{L^3 [12 - 12 + 4]}{L^5 \left[\frac{27 - 45 + 20}{15} \right]} = \frac{E \cdot I}{L^2} \cdot \frac{4}{\frac{15}{2}} = \frac{E \cdot I}{L^2} \cdot 30$$

$$F_K = \underline{\underline{\frac{E \cdot I}{L^2} \cdot \pi^2 \cdot 3,04\dots}} \quad \text{anstatt} \quad F_{E4} = \frac{E \cdot I}{L^2} \cdot \pi^2 \cdot 4$$

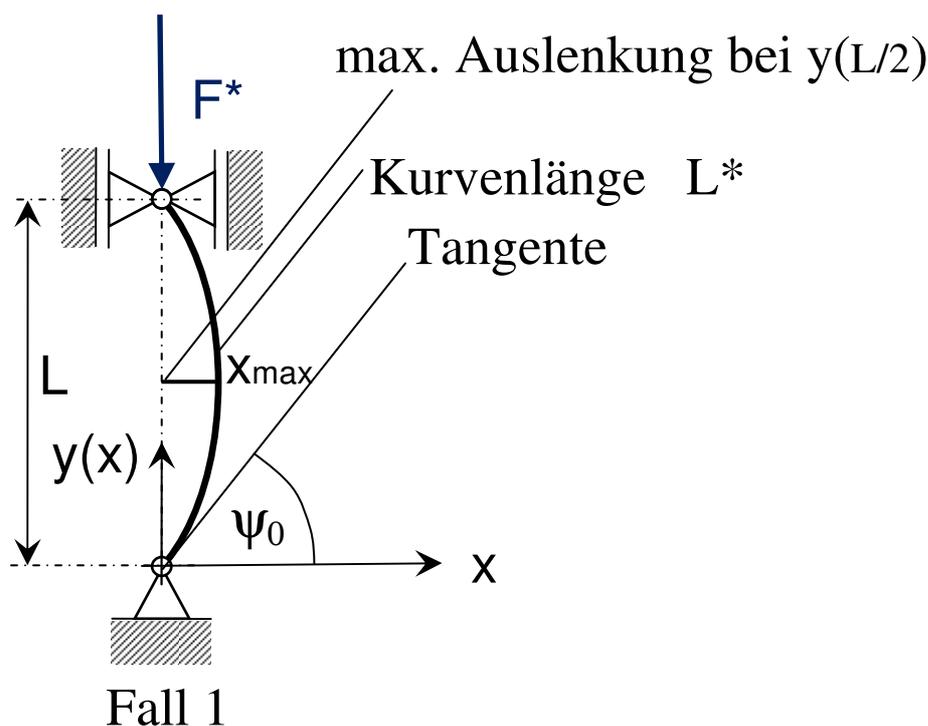
D.h., der gewählte Näherungsansatz führt daher auch nur zu einer angenäherten Knicklast, die etwa $\frac{3}{4}$ des theoretischen Wertes (nach Euler) entspricht. Man erkennt daran, dass es schon von dem Näherungsvermögen der Ansatzfunktion abhängt, wie nah man an die theoretisch korrekten Werte herankommt. Die Stärke der Ritzschen Methode liegt daher darin, die zur Anwendung kommen zu lassen, wenn die elastische Biegelinie $w(x)$ nicht mehr exakt ermittelt werden kann oder sogar unmöglich zu bestimmen ist. Solche Fälle können dann auftreten, wenn beispielsweise der Knickstab keinen konstanten Querschnitt mehr aufweist, sondern vom Längsachsen-Parameter x abhängt.

Damit hätten wir als dritten Lösungsweg die Anwendung der Energiemethode mit Hilfe des elastischen Potentials beleuchtet und darüber hinaus eine Methode dargestellt, die das Arbeiten mit angenäherten Ansatzfunktionen bzgl. der elastischen Biegelinie ermöglichen.

1.5 Bestimmung der Biegelinie eines elastischen Knickstabes:

Bisher wurde in den vorangegangenen Abschnitten die Suche nach der kritischen Knicklast behandelt, ab welcher der in Längsrichtung belastete Stab in die Instabilität wechselt. Eine Aussage über die Amplitude der Biegelinie bzw. über die wahre Verformung am Stab im überkritischen Bereich liefern diese Methoden nicht, weil die Biegemomente in diesen Fällen vereinfacht in Beziehung mit der zweiten Ableitung $w''(x)$ gesetzt wurden, also eine Linearisierung des Problems vorliegt. Das Biegemoment ist jedoch proportional zur Krümmung $K(x)$, wodurch die Differentialgleichungen nichtlinear werden und somit mehr Aufwand für die Lösung des Problems erfordern, was dann über das Bestimmen der Eigenwerte (Knicklasten) hinausgeht.

Die Berechnung der Elastika des Knickstabes über die unveränderte Krümmungsformel (ohne Linearisierung) soll im Folgenden dargestellt werden. Hierzu wechseln wir ausnahmsweise die Koordinatenbezeichnung und bezeichnen die Längsachse des Stabes mit $y(x)$ und die Durchbiegerichtung mit x . Unser Ausgangsproblem soll der Knickfall 1) sein.



Die Krümmungsformel lautet:

$$K(x) = \frac{y''(x)}{\left(\sqrt{1+(y'(x))^2}\right)^3} \Rightarrow \frac{-M_{b(x)}}{E \cdot I} = \frac{y''(x)}{\left(\sqrt{1+(y'(x))^2}\right)^3} \quad \text{wenn } I_{(x)} = I = \text{const}$$

Die Schnittlasten (wie schon in Abschnitt 1.1 angegeben) sind dann:

$$F_{N(x)} = -F^* \\ M_{b(x)} = F_{Ax} \cdot x = F^* \cdot x$$

Die Differentialgleichung zum Problem lautet damit:

$$K(x) = \frac{-M_{b(x)}}{E \cdot I} = \frac{y''(x)}{\left(\sqrt{1+(y'(x))^2}\right)^3} \Rightarrow \frac{-F^* \cdot x}{E \cdot I} = \frac{y''(x)}{\left(\sqrt{1+(y'(x))^2}\right)^3}$$

Die Krümmung ist also proportional zur Auslenkung x , wodurch wir nun ansetzen, dass ...

$$K(x) = -2 \cdot C_1 \cdot x \quad \Rightarrow \quad \frac{-K(x)}{2x} = \frac{F^*}{2E \cdot I} = C_1 > 0$$

Zur weiteren Behandlung der Problematik soll folgender Ausdruck nach dx abgeleitet werden.

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \right] = \frac{y'' \cdot \sqrt{1+y'^2} - y' \cdot \frac{2y' \cdot y''}{2\sqrt{1+y'^2}}}{\left(\sqrt{1+y'^2}\right)^2} = \frac{y'' \cdot (1+y'^2) - y'^2 \cdot y''}{\left(\sqrt{1+y'^2}\right)^3} \\ \frac{d}{dx} \left[\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \right] = \frac{y''}{\left(\sqrt{1+y'^2}\right)^3} = K(x) \quad \Rightarrow \quad \int K(x) \cdot dx = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} + C$$

Die Integration der Krümmung $K(x)$ führt damit zur Form:

$$\int K(x) \cdot dx = \int -2 \cdot C_1 \cdot x \cdot dx = -C_1 \cdot x^2 + C \\ \Rightarrow \quad \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = -C_1 \cdot x^2 + C_2$$

Die erste Ableitung $y'(x)$ gibt die Tangentensteigungen entlang der Kurve an:

$$y'(x) = \tan(\psi(x))$$

Dadurch lässt sich die Gleichung weiter umformen in:

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{\tan(\psi)}{\sqrt{1+\tan^2(\psi)}} = \sin(\psi) = -C_1 \cdot x^2 + C_2$$

Für die Randbedingung $\psi_{(x=0)}$ ergibt das die Konstante C_2 :

$$\sin(\psi_0) = C_2 \quad \text{mit} \quad (C_2 + 1) > 0$$

An dieser Stelle wird eine Hilfskonstante χ eingeführt:

$$\chi^2 = \frac{1}{2} \cdot (1 + \sin(\psi_0)) = \frac{1}{2} \cdot (1 + C_2) \quad \text{bzw.} \quad 2 \cdot \chi^2 - 1 = C_2$$

Als eine weitere Randbedingung soll nun gelten, dass das Linienintegral L^* der Biegelinie in Gänze zur Ausgangslänge (Stablänge) L führt.

$$L^* = L = 2 \cdot \int_{x=0}^{x_{\max}} \sqrt{1 + y'^2} \cdot dx$$

Als nächster Schritt wird die Variable x von einem weiteren Parameter φ abhängig gemacht, wobei folgende Parameterdarstellung gelten soll:

$$x = x(\varphi) = \sqrt{\frac{2}{C_1}} \cdot \chi \cdot \cos(\varphi)$$

Der Laufparameter φ besitzt dann die Werte im Intervall $[0 ; \pi/2]$.

$$x_{\max} = x(\varphi = 0) = \sqrt{\frac{2}{C_1}} \cdot \chi \quad \text{und} \quad x_0 = x(\varphi = \pi/2) = 0$$

Aus der Integration der Krümmung $K(x)$ hatten wir einen Ausdruck erhalten, der jetzt noch weiter umgeformt werden soll, so dass er für das Linienintegral besser passt. Zuerst wird quadriert und dann weiter umgestellt.

$$\begin{aligned} \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} &= -C_1 \cdot x^2 + C_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{y'^2}{1 + y'^2} = (C_2 - C_1 \cdot x^2)^2 \quad \Rightarrow \quad 1 - \frac{y'^2}{1 + y'^2} = 1 - (C_2 - C_1 \cdot x^2)^2 \\ \Rightarrow \quad \frac{1 + y'^2}{1 + y'^2} - \frac{y'^2}{1 + y'^2} &= 1 - (C_2 - C_1 \cdot x^2)^2 \quad \Rightarrow \quad 1 + y'^2 = \frac{1}{1 - (C_2 - C_1 \cdot x^2)^2} \end{aligned}$$

Nun wird noch die Parameterform von $x(\varphi)$ eingesetzt und der Ausdruck in das Linienintegral eingefügt.

$$1 + y'^2 = \frac{1}{1 - \left(C_2 - C_1 \cdot \frac{2}{C_1} \cdot \chi^2 \cdot \cos^2(\varphi) \right)^2} = \frac{1}{1 - \left((2 \cdot \chi^2 - 1) - 2 \cdot \chi^2 \cdot \cos^2(\varphi) \right)^2}$$

$$1 + y'^2 = \frac{1}{1 - (2 \cdot \chi^2 \cdot (1 - \cos^2(\varphi)) - 1)^2} = \frac{1}{1 - (2 \cdot \chi^2 \cdot \sin^2(\varphi) - 1)^2} = \frac{1}{1 - 4 \cdot \chi^4 \cdot \sin^4(\varphi) + 4 \cdot \chi^2 \cdot \sin^2(\varphi) - 1}$$

$$1 + y'^2 = \frac{1}{4 \cdot \chi^2 \cdot \sin^2(\varphi) \cdot (1 - \chi^2 \cdot \sin^2(\varphi))} \Rightarrow \sqrt{1 + y'^2} = \frac{1}{2 \cdot \chi \cdot \sin(\varphi) \cdot \sqrt{1 - \chi^2 \cdot \sin^2(\varphi)}}$$

$$L^* = L = 2 \cdot \int_{x=0}^{x_{\max}} \sqrt{1 + y'^2} \cdot dx = 2 \cdot \int_{x=0}^{x_{\max}} \frac{1}{2 \cdot \chi \cdot \sin(\varphi) \cdot \sqrt{1 - \chi^2 \cdot \sin^2(\varphi)}} \cdot dx$$

Jetzt muss das Integral noch an den Parameter φ angepasst werden.

$$\frac{d[x(\varphi)]}{d\varphi} = \frac{d\left[\sqrt{\frac{2}{C_1}} \cdot \chi \cdot \cos(\varphi) \right]}{d\varphi} = -\sqrt{\frac{2}{C_1}} \cdot \chi \cdot \sin(\varphi) \Rightarrow dx = -\sqrt{\frac{2}{C_1}} \cdot \chi \cdot \sin(\varphi) \cdot d\varphi$$

$$L^* = L = 2 \cdot \int_{\varphi=\pi/2}^{\varphi=0} \frac{-\sqrt{\frac{2}{C_1}} \cdot \chi \cdot \sin(\varphi)}{2 \cdot \chi \cdot \sin(\varphi) \cdot \sqrt{1 - \chi^2 \cdot \sin^2(\varphi)}} \cdot d\varphi = 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{2C_1}} \cdot \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - \chi^2 \cdot \sin^2(\varphi)}} \cdot d\varphi$$

Es ergibt sich also ein vollständiges elliptisches Integral erster Gattung $\mathcal{F}(\pi/2, \chi)$.

$$L^* = L = 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{2C_1}} \cdot \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \chi^2 \cdot \sin^2(\varphi)}} = \sqrt{\frac{1}{2C_1}} \cdot 2 \cdot \mathcal{F}\left(\frac{\pi}{2}, \chi\right)$$

mit $\chi = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot (1 + \sin(\psi_0))}$

Das elliptische Integral kann als Reihenentwicklung auch so geschrieben werden:

$$\mathcal{F}\left(\frac{\pi}{2}, \chi\right) = \frac{1}{2} \pi \cdot \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \chi^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \cdot \chi^4 + \dots \right]$$

Mittels der Lösung des Linienintegrals ist nun auch eine Bestimmung der kritischen Knicklast F^*_K möglich, wenn die Länge zuvor quadriert wird.

$$L^2 = \frac{1}{2C_1} \cdot 4 \cdot F^2\left(\frac{\pi}{2}, \chi\right) \quad \text{mit} \quad \frac{F^*}{2E \cdot I} = C_1$$

$$L^2 \cdot 2 \cdot C_1 = 4 \cdot F^2\left(\frac{\pi}{2}, \chi\right) = L^2 \cdot \frac{F^*}{E \cdot I} \quad \Rightarrow \quad F^* = \frac{E \cdot I}{L^2} \cdot 4 \cdot F^2\left(\frac{\pi}{2}, \chi\right)$$

Nun muss bei der kritischen Knicklast F^*_K die Randbedingung vorausgesetzt werden, dass noch keine Verformung am Stab eingetreten ist, also $\chi = 0$ sein muss, weil dann $x_{\max} = 0$ sein soll.

$$x_{\max} = x(\varphi = 0) = \sqrt{\frac{2}{C_1}} \cdot \chi_K = 0 \quad \Rightarrow \quad \chi_K = 0$$

$$\text{somit} \quad F^2\left(\frac{\pi}{2}, \chi_K = 0\right) = \frac{\pi^2}{4} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{F^*_K = \frac{E \cdot I}{L^2} \cdot \pi^2}}$$

Das ist die Bestätigung für die schon bekannte Eulersche Knicklast vom Fall 1).

Eine Möglichkeit dahingehend, eine Parameterdarstellung von $x(\varphi)$ / $y(\varphi)$ zu erhalten, ist mit der Integration von $y'(\varphi)$ nach $d\varphi$ gegeben.

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = -C_1 \cdot x^2 + C_2 \quad \Rightarrow \quad 1 + y'^2 = \frac{1}{1 - (C_2 - C_1 \cdot x^2)^2}$$

$$y'^2 = \frac{1 - 1 + (C_2 - C_1 \cdot x^2)^2}{1 - (C_2 - C_1 \cdot x^2)^2} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{(C_2 - C_1 \cdot x^2)}{\sqrt{1 - (C_2 - C_1 \cdot x^2)^2}}$$

$$y' = \frac{(2 \cdot \chi^2 - 1) - 2 \cdot \chi^2 \cdot \cos^2(\varphi)}{2 \cdot \chi \cdot \sin(\varphi) \cdot \sqrt{1 - \chi^2 \cdot \sin^2(\varphi)}} = \frac{2 \cdot \chi^2 \cdot (\cos^2(\varphi) - 1) - 1}{2 \cdot \chi \cdot \sin(\varphi) \cdot \sqrt{1 - \chi^2 \cdot \sin^2(\varphi)}}$$

$$y' = \frac{2 \cdot \chi^2 \cdot \sin^2(\varphi) - 1}{2 \cdot \chi \cdot \sin(\varphi) \cdot \sqrt{1 - \chi^2 \cdot \sin^2(\varphi)}} = \frac{dy}{dx}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{dy}{d\varphi} &= \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{d\varphi} = \frac{2 \cdot \chi^2 \cdot \sin^2(\varphi) - 1}{2 \cdot \chi \cdot \sin(\varphi) \cdot \sqrt{1 - \chi^2 \cdot \sin^2(\varphi)}} \cdot \left(-\sqrt{\frac{2}{C_1}} \cdot \chi \cdot \sin(\varphi) \right) \\ \Rightarrow dy &= \frac{1 - 2 \cdot \chi^2 \cdot \sin^2(\varphi)}{\sqrt{2 \cdot C_1} \cdot \sqrt{1 - \chi^2 \cdot \sin^2(\varphi)}} \cdot d\varphi \\ \Rightarrow y(\varphi) &= \frac{2 \cdot (1 - \chi^2 \cdot \sin^2(\varphi)) - 1}{\sqrt{2 \cdot C_1} \cdot \sqrt{1 - \chi^2 \cdot \sin^2(\varphi)}} \cdot d\varphi = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot C_1}} \left[2 \cdot \sqrt{1 - \chi^2 \cdot \sin^2(\varphi)} - \frac{1}{\sqrt{1 - \chi^2 \cdot \sin^2(\varphi)}} \right] \cdot d\varphi \\ \Rightarrow y(\varphi) &= \frac{1}{\sqrt{2 \cdot C_1}} \left[2 \cdot \int_{\varphi=\pi/2}^{\varphi} \sqrt{1 - \chi^2 \cdot \sin^2(\varphi)} \cdot d\varphi - \int_{\varphi=\pi/2}^{\varphi} \frac{1}{\sqrt{1 - \chi^2 \cdot \sin^2(\varphi)}} \cdot d\varphi \right] \end{aligned}$$

Bei dem ersten Integralausdruck handelt es um ein elliptisches Integral 2. Gattung $\mathcal{E}(\varphi, \chi)$ und beim zweiten Ausdruck um das schon erwähnte 1. Gattung $\mathcal{F}(\varphi, \chi)$. Diese Werte müssen für jedes φ berechnet oder, sofern entsprechende Tabellenwerke vorhanden sind, aus dieser Zusammenstellung dann entnommen werden.

$$\Rightarrow y(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot C_1}} \left[2 \cdot E(\varphi, \chi) - 2 \cdot E\left(\frac{\pi}{2}, \chi\right) - F(\varphi, \chi) + F\left(\frac{\pi}{2}, \chi\right) \right]$$

mit $x(\varphi) = \sqrt{\frac{2}{C_1}} \cdot \chi \cdot \cos(\varphi) \quad \chi = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot (1 + \sin(\psi_0))} \quad C_1 = \frac{2}{L^2} \cdot F^2\left(\frac{\pi}{2}, \chi\right)$

Um die Biegelinie zu erzeugen, wählt man sich eine Anfangssteigung $\psi_{(x=0)}$ und berechnet sich die Hilfskonstante χ . Außerdem lässt sich über das vollständige elliptische Integral 1. Gattung die Konstante C_1 bestimmen. Dann lässt man bzgl. x und y den Parameter von $\varphi=0$ bis $\varphi=\pi/2$ durchlaufen. Als Ergebnis erhält man schließlich eine Hälfte der symmetrischen Biegelinie von x_0 bis x_{\max} .

Da bei der Stabknickung ab dem Erreichen der kritischen Knicklast die Verformungen sehr schnell zunehmen (Instabilität), wäre eine Betrachtung der sich einstellenden Verformungen nur sinnvoll, wenn die Druckkraft geringfügig größer als der kritische Wert ist. In diesem Zusammenhang soll vorausgesetzt werden, dass die Auslenkung x_{\max} sehr klein ausfällt. Die Hilfskonstante χ läuft dann gegen einen ebenso kleinen Wert ε . Betrachtet man also den Anfangszustand der Ausknickung, dann lässt sich eine Relation zwischen der maximalen Auslenkung und der Druckkraft F^* ableiten.

$$\chi \rightarrow \varepsilon \text{ wobei} \quad \varepsilon \ll 1$$

Die Reihenentwicklung vom vollständigen elliptische Integral $\mathcal{F}(\pi/2, \chi)$ kann dann nach dem zweiten Glied abgebrochen werden und trotzdem noch als gute Annäherung gelten.

$$F\left(\frac{\pi}{2}, \varepsilon\right) = \frac{1}{2} \pi \cdot \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \varepsilon^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \cdot \varepsilon^4 + \dots \right] \approx \frac{\pi}{2} \cdot \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \varepsilon^2 \right]$$

Die maximale Auslenkung berechnet sich dann mit:

$$x_{\max} = \sqrt{\frac{2}{C_1}} \cdot \chi \cdot \cos(0) = \sqrt{\frac{2}{C_1}} \cdot \varepsilon = \sqrt{\frac{2}{L^2 \cdot F^2\left(\frac{\pi}{2}, \varepsilon\right)}} \cdot \varepsilon = \frac{L}{F\left(\frac{\pi}{2}, \varepsilon\right)} \cdot \varepsilon$$

$$x_{\max} \approx \frac{L}{\frac{\pi}{2} \cdot \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \varepsilon^2 \right]} \cdot \varepsilon \approx \frac{L}{\frac{\pi}{2}} \cdot \varepsilon = 2 \cdot \frac{L}{\pi} \cdot \varepsilon$$

Die Druckkraft F^* lässt sich auf diese Weise berechnen, wobei F^* nur geringfügig größer als F_K zu sein hat (Anfangsvoraussetzung).

$$F^* = \frac{E \cdot I}{L^2} \cdot 4 \cdot F^2\left(\frac{\pi}{2}, \varepsilon\right) \approx \frac{E \cdot I}{L^2} \cdot 4 \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \varepsilon^2 \right]^2$$

$$F^* = \frac{E \cdot I}{L^2} \cdot \pi^2 \cdot \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \varepsilon^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \varepsilon^4 \right] \approx \frac{E \cdot I}{L^2} \cdot \pi^2 \cdot \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \varepsilon^2 \right]$$

$$\Rightarrow \varepsilon = \sqrt{2 \cdot \left(\frac{F^* \cdot L^2}{E \cdot I \cdot \pi^2} - 1 \right)}$$

Das ε kann jetzt in die Gleichung für x_{\max} eingesetzt werden.

$$x_{\max} \approx 2 \cdot \frac{L}{\pi} \cdot \varepsilon = 2 \cdot \frac{L}{\pi} \cdot \sqrt{2 \cdot \left(\frac{F^* \cdot L^2 - E \cdot I \cdot \pi^2}{E \cdot I \cdot \pi^2} \right)} = \sqrt{8 \cdot \left(\frac{F^* \cdot L^2 - E \cdot I \cdot \pi^2}{\left(\frac{E \cdot I \cdot \pi^2}{L^2} \right) \cdot \pi^2} \right)}$$

Über die Definition der kritische Knicklast kommen wir zum Resultat der Auslenkung:

$$F^*_K = \frac{E \cdot I}{L^2} \cdot \pi^2 \quad \Rightarrow \quad x_{\max} \approx \sqrt{8 \cdot \left(\frac{F^* \cdot L^2 - F^*_K \cdot L^2}{F^*_K \cdot \pi^2} \right)} = L \cdot \sqrt{8 \cdot \frac{F^* - F^*_K}{F^*_K \cdot \pi^2}}$$

$$\Rightarrow x_{\max} \approx \underline{\underline{L \cdot 0,9003 \cdot \sqrt{\frac{F^*}{F^*_K} - 1}}}$$

D.h., wenn $F^* = 1,005 \cdot F^*_K$ ist, dann wäre die Auslenkung $x_{\max} \approx 0,064 \cdot L$.

Da ja die kritische Knicklast F^*_K ähnlich so groß ist wie die Druckkraft F^* , kann man die Gleichung für x_{\max} als Näherungslösung auch so schreiben.

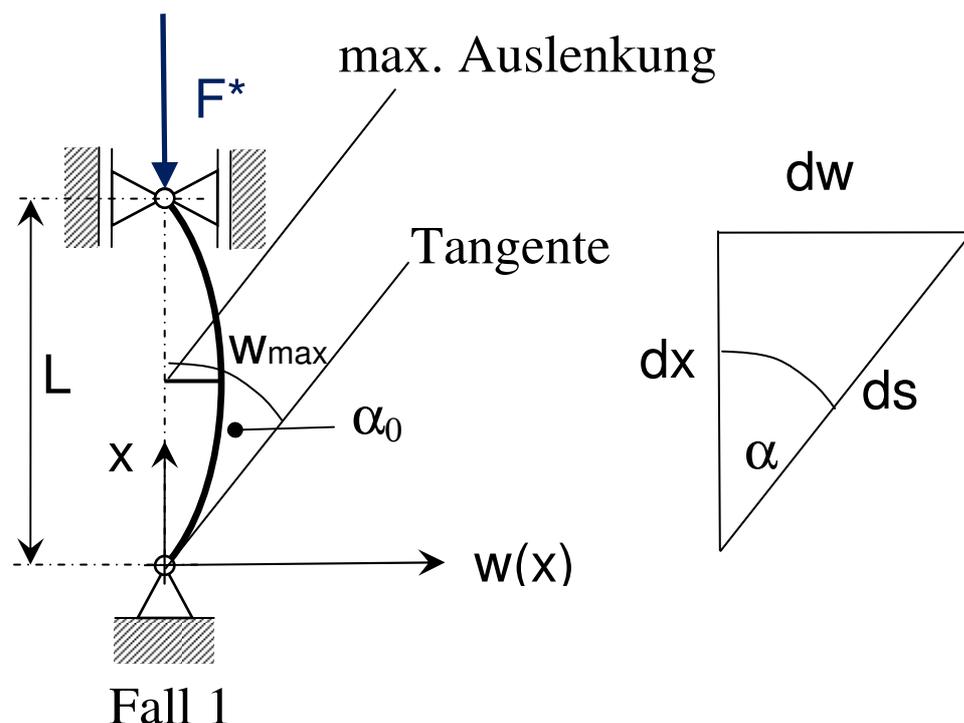
$$x_{\max} \approx \sqrt{8 \cdot \left(\frac{F^* \cdot L^2 - E \cdot I \cdot \pi^2}{F^* \cdot \pi^2} \right)} \quad \text{weil} \quad F^* \approx F^*_K$$

Hinweis: Sobald die Druckkraft F^* weiter zunimmt, also in der Größe dem kritischen Wert zu sehr überwiegt, haben diese hergeleiteten Formeln keine Gültigkeit mehr, da mit der einsetzenden Instabilität die Auslenkungen der Biegelinie jetzt Größenwerte annehmen, die nicht mehr den Ausgangsvoraussetzungen entsprechen (mit $\chi \rightarrow \varepsilon$ und $\varepsilon \ll 1$).

1.6 Bestimmung der Biegelinie eines elastischen Knickstabes per Iterationsverfahren:

Im Abschnitt 1.5 konnte die Differentialgleichung für den Knickfall 1) in der Form gelöst werden, so dass schlussendlich über die elliptischen Integrale eine Aussage über den Biegeverlauf möglich gewesen ist. Eine weitere Variante besteht darin, die nichtlineare Differentialgleichung trickreich in eine Form zu bringen (Näherung), die dann über die Methode der Iteration schrittweise berechnet werden kann.

Dazu soll wiederholt der Knickfall 1) zur Anschauung dienen, wobei in diesem Beispiel die Durchbiegung mit $w(x)$ und die Längsachse des Stabes mit x bezeichnet wird.



Die Ausgangsgleichung lautet somit:

$$K(x) = \frac{-M_{b(x)}}{E \cdot I} = \frac{w''(x)}{\left(\sqrt{1+(w'(x))^2}\right)^3} \Rightarrow \frac{-F^* \cdot w(x)}{E \cdot I} = \frac{w''(x)}{\left(\sqrt{1+(w'(x))^2}\right)^3}$$

$$\frac{-F^* \cdot w(x)}{E \cdot I} = \frac{w''(x)}{\left(\sqrt{1+(w'(x))^2}\right)^3} = \frac{d\alpha}{ds} = \dot{\alpha} = \frac{d}{ds} \left[\arctan\left(\frac{dw}{dx}\right) \right] = -\omega^2 \cdot w(x) \quad \#)$$

mit $\omega^2 = \frac{F^*}{E \cdot I}$

#) Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass die sich Krümmung als Ableitung des Tangentenwinkel α nach der Bogenlänge s berechnet, also der zweiten Ableitung eines Radiusvektors $r(s)$ entspricht.

Für die weitere Herleitung ist es von Vorteil, die Biegelinie anstatt von x von der Variablen s (der Bogenlänge) abhängig zu machen.

Es gilt dann: $\frac{dw}{ds} = \dot{w} = \sin(\alpha) \Rightarrow \frac{d^2w}{ds^2} = \ddot{w} = \dot{\alpha} \cdot \cos(\alpha) = -\omega^2 \cdot w(s) \cdot \cos(\alpha)$

Für unsere Betrachtungen kommen wiederum nur sehr kleine Auslenkungswinkel α in Frage, so dass einige Vereinfachungen daraus folgen.

$$\cos(\alpha) \approx 1 - \frac{1}{2} \alpha^2 \quad \text{sowie} \quad \dot{w} = \sin(\alpha) \approx \alpha \Rightarrow \cos(\alpha) \approx 1 - \frac{1}{2} \dot{w}^2$$

Die Differentialgleichung lautet jetzt:

$$\ddot{w} + \omega^2 \cdot w(s) \cdot \cos(\alpha) = 0 \Rightarrow \text{Näherung: } \ddot{w} + \omega^2 \cdot w(s) \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \dot{w}^2\right) = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\ddot{w} + \omega^2 \cdot w = \frac{1}{2} \omega^2 \cdot \dot{w}^2 \cdot w}}$$

Diese Gleichung gilt es nun zu lösen, wobei die rechte Seite der Gleichung den Zweck erfüllen soll, dort iterativ mit den Näherungslösungen $w_i(s)$ zu arbeiten. Gestartet wird mit einer Ansatzfunktion $w_1(s)$, die der Lösung der homogenen Differentialgleichung genügen soll.

$$\ddot{w} + \omega^2 \cdot w = \frac{1}{2} \omega^2 \cdot \dot{w}_1^2 \cdot w_1 \quad \text{mit} \quad \ddot{w}_1 + \omega_1^2 \cdot w_1 = 0$$

Die allgemeine Lösung ist gegeben durch:

$$w_1(s) = C_1 \cdot \cos(\omega_1 \cdot s) + C_2 \cdot \sin(\omega_1 \cdot s)$$

Das Einsetzen der Randbedingungen ergibt dann die Form:

$$w_1(0) = 0 = C_1 \quad \text{und} \quad w_1(L) = 0 = C_2 \cdot \sin(\omega_1 \cdot L)$$

mit dem Eigenwert:
$$\omega_1 \cdot L = \pi \quad \Rightarrow \quad \omega_1^2 = \frac{\pi^2}{L^2}$$

sowie:
$$w_1(L/2) = w_{\max} = C_2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = C_2$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{w} + \omega^2 \cdot w = \frac{1}{2} \omega^2 \cdot \dot{w}_1^2 \cdot w_1 = \frac{1}{2} \omega^2 \cdot \omega_1^2 \cdot w_{\max}^2 \cdot \cos^2(\omega_1 \cdot s) \cdot w_{\max} \cdot \sin(\omega_1 \cdot s)$$

Der Ausdruck lässt sich mit Hilfe eines Additionstheorems weiter vereinfachen, weil ...

$$2 \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\varphi) = \sin(2 \cdot \varphi)$$

$$2 \cdot \cos^2(\varphi) \cdot \sin(\varphi) = \sin\left(\frac{3 \cdot \varphi + \varphi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3 \cdot \varphi - \varphi}{2}\right) = \frac{\sin(3 \cdot \varphi) + \sin(\varphi)}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \cos^2(\varphi) \cdot \sin(\varphi) = \frac{\sin(3 \cdot \varphi) + \sin(\varphi)}{4}$$

Damit lautet die Differentialgleichung (1. Iteration) jetzt:

$$\Rightarrow \quad \ddot{w} + \omega^2 \cdot w = \frac{1}{8} \omega^2 \cdot \omega_1^2 \cdot w_{\max}^3 \cdot (\sin(3 \cdot \omega_1 \cdot s) + \sin(\omega_1 \cdot s))$$

Um diese Differentialgleichung für $w(x)$ zu lösen, soll ein den Randbedingungen genügender neuer Ansatz gewählt werden.

Ansatz:
$$w(s) = w_{2(x)} = w_{\max} \cdot \sin(\omega_1 \cdot s) + A_3 \cdot \sin(3 \cdot \omega_1 \cdot s)$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{w} + \omega^2 \cdot w = -w_{\max} \cdot \omega_1^2 \cdot \sin(\omega_1 \cdot s) - A_3 \cdot 9 \cdot \omega_1^2 \cdot \sin(3 \cdot \omega_1 \cdot s) + \omega^2 \cdot (w_{\max} \cdot \sin(\omega_1 \cdot s) + A_3 \cdot \sin(3 \cdot \omega_1 \cdot s))$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{w} + \omega^2 \cdot w = w_{\max} \cdot (\omega^2 - \omega_1^2) \cdot \sin(\omega_1 \cdot s) + A_3 \cdot (\omega^2 - 9 \cdot \omega_1^2) \cdot \sin(3 \cdot \omega_1 \cdot s)$$

Diese Gleichung muss mit der obigen Gleichung der 1. Iteration wieder gleichgesetzt werden.

$$w_{\max} \cdot (\omega^2 - \omega_1^2) \cdot \sin(\omega_1 \cdot s) + A_3 \cdot (\omega^2 - 9 \cdot \omega_1^2) \cdot \sin(3 \cdot \omega_1 \cdot s) = \frac{1}{8} \omega^2 \cdot \omega_1^2 \cdot w_{\max}^3 \cdot (\sin(3 \cdot \omega_1 \cdot s) + \sin(\omega_1 \cdot s))$$

Der Koeffizientenvergleich liefert dann die beiden folgenden Gleichungen:

$$w_{\max} \cdot (\omega^2 - \omega_1^2) \cdot \sin(\omega_1 \cdot s) = \frac{1}{8} \omega^2 \cdot \omega_1^2 \cdot w_{\max}^3 \cdot \sin(\omega_1 \cdot s) \Rightarrow \underline{(\omega^2 - \omega_1^2) = \frac{1}{8} \omega^2 \cdot \omega_1^2 \cdot w_{\max}^2}$$

$$A_3 \cdot (\omega^2 - 9 \cdot \omega_1^2) \cdot \sin(3 \cdot \omega_1 \cdot s) = \frac{1}{8} \omega^2 \cdot \omega_1^2 \cdot w_{\max}^3 \cdot \sin(3 \cdot \omega_1 \cdot s) \Rightarrow \underline{A_3 \cdot (\omega^2 - 9 \cdot \omega_1^2) = \frac{1}{8} \omega^2 \cdot \omega_1^2 \cdot w_{\max}^3}$$

Setzt man beide Gleichungen miteinander in Beziehung so ergibt sich:

$$\Rightarrow w_{\max} \cdot (\omega^2 - \omega_1^2) = A_3 \cdot (\omega^2 - 9 \cdot \omega_1^2) \Rightarrow A_3 = w_{\max} \cdot \frac{(\omega^2 - \omega_1^2)}{(\omega^2 - 9 \cdot \omega_1^2)}$$

$$\text{mit } w_{\max} = \sqrt{8 \cdot \frac{(\omega^2 - \omega_1^2)}{\omega^2 \cdot \omega_1^2}} \quad \omega^2 = \frac{F^*}{E \cdot I} \quad \omega_1^2 = \frac{\pi^2}{L^2}$$

$$\Rightarrow w_{\max} = \sqrt{8 \cdot \frac{\left(\frac{F^*}{E \cdot I} - \frac{\pi^2}{L^2} \right)}{\frac{F^*}{E \cdot I} \cdot \frac{\pi^2}{L^2}}} = \sqrt{8 \cdot \frac{\left(\frac{F^* \cdot L^2 - \pi^2 \cdot E \cdot I}{E \cdot I \cdot L^2} \right)}{\frac{F^*}{E \cdot I} \cdot \frac{\pi^2}{L^2}}} = \sqrt{8 \cdot \frac{\left(F^* \cdot L^2 - \pi^2 \cdot E \cdot I \right)}{F^* \cdot \pi^2}}$$

Das ist dieselbe Aussage wie für die maximale Auslenkung aus Abschnitt 1.5, womit die Methode über das Iterationsverfahren (bei 1x Iteration) zum selben Zielergebnis geführt hat.

Aus dieser Gleichung für w_{\max} lässt sich sofort die kritische Knicklast ablesen, weil in diesem Fall die Auslenkung gleich Null gesetzt werden muss.

$$\Rightarrow F^* \cdot L^2 - \pi^2 \cdot E \cdot I = 0 \Rightarrow F^*_K = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{L^2}$$

Da für die gewählte Betrachtungsweise wieder gilt, dass ...

$$F^* \approx F^*_K \quad \text{und} \quad F^* > F^*_K \quad \text{sowie} \quad \frac{\omega^2}{\omega_1^2} = \frac{F^*}{F^*_K} \approx 1$$

Die zweite Konstante A_3 errechnet sich dann auf diese Weise:

$$A_3 = w_{\max} \cdot \frac{(\omega^2 - \omega_1^2)}{(\omega^2 - 9 \cdot \omega_1^2)} = w_{\max} \cdot \frac{\left(\frac{F^*}{E \cdot I} - \frac{\pi^2}{L^2}\right)}{\left(\frac{F^*}{E \cdot I} - 9 \cdot \frac{\pi^2}{L^2}\right)} = w_{\max} \cdot \frac{\left(\frac{F^* \cdot L^2 - \pi^2 \cdot E \cdot I}{F^* \cdot L^2 - 9 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot I}\right)}{\underline{\underline{\quad}}}$$

bzw.

$$A_3 = w_{\max} \cdot \frac{\left(\frac{\omega^2}{\omega_1^2} - 1\right)}{\left(\frac{\omega^2}{\omega_1^2} - 9\right)} \approx w_{\max} \cdot \frac{\left(\frac{\omega^2}{\omega_1^2} - 1\right)}{(1-9)} = w_{\max} \cdot \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{\omega^2}{\omega_1^2} - 1\right) \quad (\text{angenähert})$$

Die Konstante A_3 ist in unserer Betrachtung vernachlässigbar klein, wodurch sich die elastische Biegelinie in großer Annäherung so schreiben wird:

$$w(s) \approx w_{\max} \cdot \sin(\omega_1 \cdot s) = \underline{\underline{\sqrt{8 \cdot \left(\frac{F^* \cdot L^2 - \pi^2 \cdot E \cdot I}{F^* \cdot \pi^2}\right)} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{L} \cdot s\right)}}$$

1.7 Die Knickbiegung und ihre Biegelinie im unterkritischen Bereich:

Bei den vorgegangenen Fällen wurde die Knicklast(Druckkraft) stets zentrisch in die Längsachse des Stabes geleitet. Im Fall der Knickbiegung soll die Drucklast mit einer Exzentrizität wirken, was der Realität bei Stabprofilen schon eher entspricht. D.h., mit der Exzentrizität e des Kraftansatzpunktes resultiert schon im unterkritischen Bereich eine Verformung des Systems aufgrund der vorliegenden Biegemomente im Stabbereich.

Für die folgende Skizze (Knickfall 1) gilt:

$$F \cdot w(x) = M_{b(x)} = -E \cdot I \cdot w''(x)$$

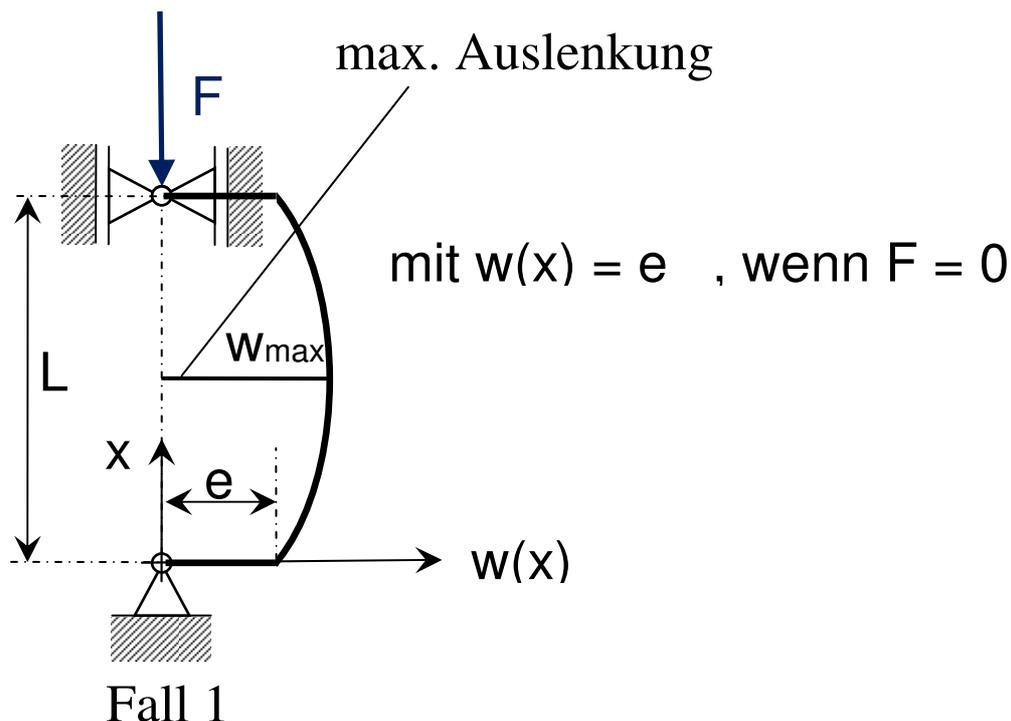
Eine den Randbedingungen gerecht werdender Ansatz wäre dann:

$$w(x) = C_1 \sin(\alpha \cdot x) + C_2 \cdot \cos(\alpha \cdot x) \quad \text{mit} \quad \alpha^2 = \frac{F}{E \cdot I}$$

Die Randbedingungen lauten:

$$w_{(x=0)} = C_2 = e \quad \text{und} \quad w'_{(x=L/2)} = 0 = \alpha \cdot C_1 \cos\left(\frac{\alpha \cdot L}{2}\right) - \alpha \cdot C_2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha \cdot L}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 0 = \alpha \cdot \left(C_1 \cdot \cos\left(\frac{\alpha \cdot L}{2}\right) - e \cdot \sin\left(\frac{\alpha \cdot L}{2}\right) \right) \Rightarrow C_1 = e \cdot \tan\left(\frac{\alpha \cdot L}{2}\right)$$



Die elastische Linie (unterkritisch!) wird damit beschrieben durch die Gleichung:

$$w(x) = e \cdot \tan\left(\frac{\alpha \cdot L}{2}\right) \cdot \sin(\alpha \cdot x) + e \cdot \cos(\alpha \cdot x) \quad \text{für} \quad F < F_E$$

Für die Stelle $x=L/2$ ergibt sich dann ein Biegunspfeil w_{\max} von:

$$w_{(x=L/2)} = e \cdot \tan\left(\frac{\alpha \cdot L}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha \cdot L}{2}\right) + e \cdot \cos\left(\frac{\alpha \cdot L}{2}\right) = \frac{e}{\cos\left(\frac{\alpha \cdot L}{2}\right)} \cdot \left[\sin^2\left(\frac{\alpha \cdot L}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{\alpha \cdot L}{2}\right) \right]$$

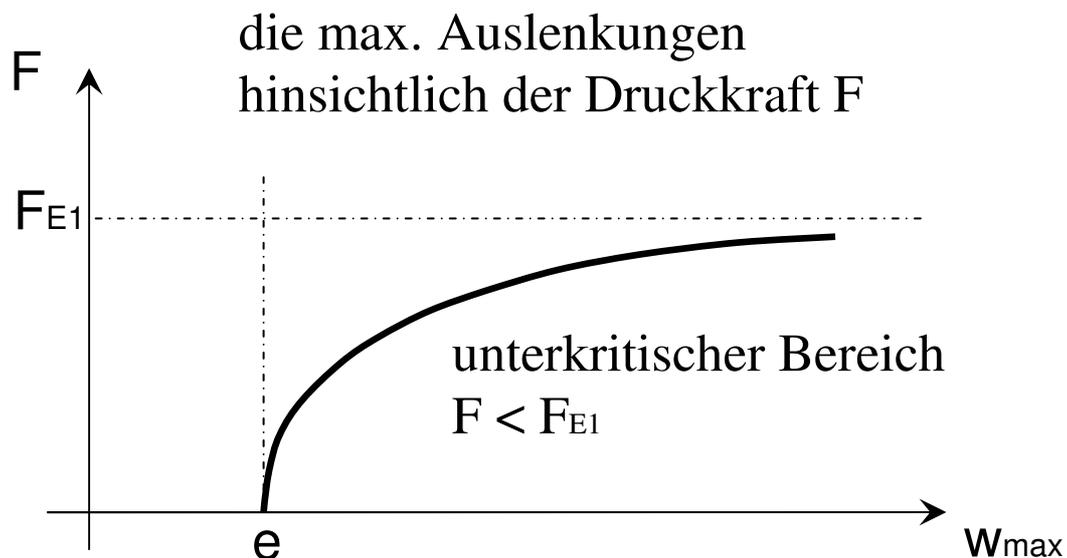
$$\underline{\underline{w_{(x=L/2)} = \frac{e}{\cos\left(\frac{\alpha \cdot L}{2}\right)} = w_{\max}}}$$

Mit der definierten Eulerschen Knicklast aus Fall 1 (F_{E1}) kann der Eigenwert α durch eine Kräfteformel ersetzt werden.

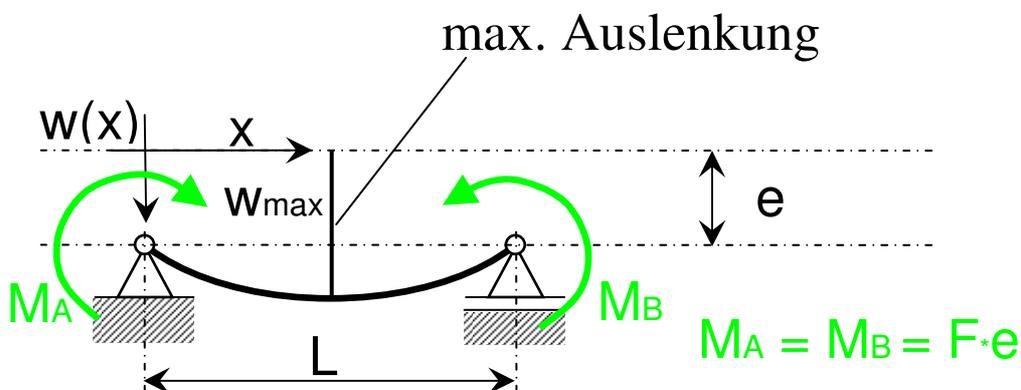
$$\alpha = \sqrt{\frac{F}{E \cdot I}} \quad \text{und} \quad F_{E1} = \frac{\pi^2}{L^2} \cdot E \cdot I \quad \Rightarrow \quad \alpha = \sqrt{\frac{F}{F_{E1}}} \cdot \frac{\pi}{L}$$

$$\underline{\underline{w_{(x=L/2)} = \frac{e}{\cos\left(\sqrt{\frac{F}{F_{E1}}} \cdot \frac{\pi}{2}\right)} = w_{\max}}}$$

Der Verlauf der unterkritischen Durchbiegung startet bei dem Wert der Exzentrizität e , wenn $F=0$ ist, und nimmt dann mit einer abfallenden Tendenz weiter zu und erreicht einen theoretisch unendlichen Wert, wenn die kritische Knicklast F_E erreicht würde. Die Kurve nähert sich asymptotisch der Knicklast F_E an, wobei es sich nur um eine idealisierte Annäherung handelt, weil der wirkliche Verlauf gemäß der Problemstellung (Differentialgleichung) nichtlinearer Natur ist. Da der Stab durch das Maß e auf Biegung beansprucht wird, des Weiteren aber in Längsrichtung auf Druck belastet wird, spricht man hierbei von der „Knickbiegung“.



Da sich die Berechnungen hier auf den unterkritischen Bereich beziehen, kann die in diesem Abschnitt abgeleitete Formel für w_{\max} mit den gängigen Berechnungsformeln für die Durchbiegungen eines Biegebalkens (mit Randlastmomenten) verglichen werden. Es handelt sich dann um einen gelenkig gelagerten Balken mit Lagerabstand L . An den beiden Gelenkstellen A und B wirken dann die Momente $\pm F \cdot e$. Es sei aber angemerkt, dass dieser Lastfall nur hinsichtlich Momente (Kräfte) anzuwenden ist, die noch weit von der Knicklast entfernt sind. Die Durchbiegung berücksichtigt nicht die Lastveränderung am verformten Stab/Balken, so wie es die Theorie 2.Ordnung erfordern würde.



Die Durchbiegung errechnet sich mittels der Superposition der beiden Lastfälle a) mit M_A und b) mit M_B an den Lagerstellen. Diese Formeln können der Fachliteratur entnommen werden (z.B. aus dem Dubbel [5]).

$$w(x)_a = \frac{M_A \cdot L^2}{6 \cdot E \cdot I} \cdot \left[2 \cdot \left(\frac{x}{L} \right) - 3 \cdot \left(\frac{x}{L} \right)^2 + \left(\frac{x}{L} \right)^3 \right] + \frac{e}{2}$$

$$w(x)_b = \frac{M_B \cdot L^2}{6 \cdot E \cdot I} \cdot \left[\left(\frac{x}{L} \right) - \left(\frac{x}{L} \right)^3 \right] + \frac{e}{2}$$

$$\Rightarrow w(x)_a + w(x)_b = \frac{F \cdot e \cdot L^2}{6 \cdot E \cdot I} \cdot \left[3 \cdot \left(\frac{x}{L} \right) - 3 \cdot \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right] + e = \frac{F \cdot e \cdot L^2}{2 \cdot E \cdot I} \cdot \left[\left(\frac{x}{L} \right) - \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right] + e = w(x)$$

Diese Gleichung würde sich auch ergeben, wenn man den anfänglichen Ansatz für die Durchbiegung $w(x)$ wie folgt gewählt hätte:

Ansatz:

$$w(x) = C_1 \cdot \left(\frac{x}{L} \right) + C_2 \cdot \left(\frac{x}{L} \right)^2 + e \quad \Rightarrow \quad w'(x) = \frac{C_1}{L} + 2 \cdot \frac{C_2}{L} \cdot \left(\frac{x}{L} \right) \quad \Rightarrow \quad w''(x) = 2 \cdot \frac{C_2}{L^2}$$

Randbedingungen:

$$w(L) = e = C_1 + C_2 + e \quad \Rightarrow \quad 0 = C_1 + C_2$$

$$w''(x) = \text{const.} = -\frac{M_b}{E \cdot I} = -2 \cdot \frac{C_2}{L^2} \quad \Rightarrow \quad C_2 = \frac{-M_b \cdot L^2}{2 \cdot E \cdot I} = \frac{-F \cdot e \cdot L^2}{2 \cdot E \cdot I} \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{+F \cdot e \cdot L^2}{2 \cdot E \cdot I}$$

resultierende elastische Linie:

$$w(x) = \frac{+F \cdot e \cdot L^2}{2 \cdot E \cdot I} \cdot \left[\left(\frac{x}{L} \right) - \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right] + e \quad \text{q.e.d.}$$

$$w_{\max} = \frac{+F \cdot e \cdot L^2}{2 \cdot E \cdot I} \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right] + e = e \cdot \left[\frac{F \cdot L^2}{8 \cdot E \cdot I} + 1 \right] \quad \text{mit} \quad \frac{F_{E1}}{F} = \frac{\pi^2}{L^2} \cdot \frac{E \cdot I}{F}$$

$$\Rightarrow w_{\max} = e \cdot \left[\frac{F}{F_{E1}} \cdot \frac{\pi^2}{8} + 1 \right]$$

Nun soll auch gezeigt werden, dass die beiden hergeleiteten Formeln für die maximalen Durchbiegungen im unterkritischen Bereich nahezu identisch werden, wenn die Druckkraft F gegen einen Wert Null läuft.

$$w_{\max I} = \frac{e}{\cos \left(\sqrt{\frac{F}{F_{E1}}} \cdot \frac{\pi}{2} \right)} \quad w_{\max II} = e \cdot \left[\frac{F}{F_{E1}} \cdot \frac{\pi^2}{8} + 1 \right] \quad \text{mit} \quad \frac{F}{F_{E1}} \cdot \frac{\pi^2}{4} = \delta \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow w_{\max I} = \frac{e}{\cos(\sqrt{\delta})} \approx \frac{e}{1 - \frac{\delta}{2}} \approx e \cdot \left(1 + \frac{\delta}{2}\right) = e \cdot \left(1 + \frac{F}{F_{E1}} \cdot \frac{\pi^2}{8}\right) = w_{\max II}$$

D.h., sofern die Druckkraft F noch relativ klein gegenüber der Knicklast F_{E1} ist, nähern sich die beiden Aussagen stark an. Im Fall $F \rightarrow 0$ unterscheiden sich die Werte nicht mehr voneinander. Setzt man entsprechende Werte ein, dann ergibt sich ein relativer Fehler von maximal 5%, wenn $F/F_{E1} < 0,20$ ist. Nähert sich die Kraft F immer mehr F_{E1} , dann weichen die Ergebnisse jedoch erheblich voneinander ab, weil der Kosinus-Term im Nenner der einen Gleichung ($w_{\max I}$) gegen Null läuft, somit dann unendlich große Werte für die Durchbiegung liefert, während die andere Gleichung ($w_{\max II}$) nur linear-elastisch anwächst. Für Druckkräfte, die sich der Region der Eulerschen Knicklast nähern, ist daher die Biegelinie von $w_{\max I}$ zu verwenden, weil sich hiermit auch die Theorie 2. Ordnung vereinbaren lässt. Denn das Biegemoment ist in diesem Fall $F \cdot w(x)$, also eine Variable der Verformung. Bei den Randlastmomenten des anderen Falls bezieht sich dieses Moment $F \cdot e$ immer auf denselben Abstand (Exzentrizität) $e = \text{konstant}$.

1.8 Die Knicklast als Merkmal der verschwindenden Eigenfrequenz:

Bisher sind alle Methoden zur Bestimmung der Knicklast davon ausgegangen, dass sich das System in einem statischen Gleichgewicht befindet (Kräfte- und Momentengleichgewicht) bzw. dass die Verformungsenergie mit der äußeren Arbeit gleichgesetzt wird. D.h., beim Knickstab sind keinerlei dynamische Betrachtungen zur Anwendung gekommen, da ja auch keine kinetischen Beiträge zu erwarten sind, wenn eine Druckkraft bis zur kritischen Knicklast gesteigert wird.

Im Folgenden werden die Eigenfrequenzen eines Kontinuumsschwingers behandelt, der dieselben geometrischen Eigenschaften und Lagerungsbedingungen aufweist wie die Eulerschen Knickfälle. Als Rechenbeispiel sei wiederum der Knickfall 1) näher betrachtet, um eine besondere Parallele zwischen der Stabknickung und Stabschwingung (Transversalschwingung) herauszuarbeiten.

Im ersten Schritt wenden wir uns wieder der Energiemethode zu, indem ein weiterer Energieterm (kinetischer Anteil) hinzukommt und in die gesamte Energiebilanz einbezogen wird.

Für die potentiellen Energie Π des Gesamtsystems ergab sich laut Abschnitt 1.4:

$$\Pi = \Pi_i - \Pi_a = \frac{1}{2} \cdot \left[E \cdot I \cdot \int_0^L w''^2(x) \cdot dx - F \cdot \int_0^L w'^2(x) \cdot dx \right]$$

Diese Differenz ist dann gleich Null, wenn die kritische Knicklast $F = F_K$ erreicht wird. Ist die Kraft F jedoch unterhalb dieses kritischen Wertes, dann ist diese Energiedifferenz größer als Null. Gehen wir also davon aus, dass dieser Stab nun mit seiner Eigenfrequenz ω (in diesem Fall die 1. Eigenfrequenz) um seine Null-Lage (Längsachse) schwingt, dann handelt es sich um eine harmonische Schwingung (zeitabhängiger Sinusverlauf), deren Energie genau dieser Energiedifferenz entsprechen muss. Die kinetische Energie für jeden Punkt des Stabes hinsichtlich seiner bestimmten Auslenkung $w(x,t)$ lässt sich dann mit folgendem Integral berechnen.

$$\Pi_{kin} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A \cdot \omega^2 \int_0^L w^2(x,t) \cdot dx = \Pi_i - \Pi_a = \frac{1}{2} \cdot \left[E \cdot I \cdot \int_0^L w''^2(x,t) \cdot dx - F \cdot \int_0^L w'^2(x,t) \cdot dx \right]$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{E \cdot I \cdot \int_0^L w''^2(x,t) \cdot dx - F \cdot \int_0^L w'^2(x,t) \cdot dx - \rho \cdot A \cdot \omega^2 \int_0^L w^2(x,t) \cdot dx = 0}}$$

Für diesen Fall sei A die konstante Querschnittsfläche des Stabes und ρ die Dichte des Materials. Die zeitliche Abhängigkeit der Biegelinie $w(x,t)$ eliminieren wir nun auf die Weise, indem einfach davon ausgegangen wird, dass die Auslenkung $w_0(x)$ zu einer Zeit t_0 vorliegen soll. Dann reduziert sich das Problem nur auf die Variable x und es die Gleichung gelten:

$$E \cdot I \cdot \int_0^L w_0''^2(x) \cdot dx - F \cdot \int_0^L w_0'^2(x) \cdot dx - \rho \cdot A \cdot \omega^2 \int_0^L w_0^2(x) \cdot dx = 0$$

Als Ansatzfunktion für die 1.Eigenform bietet sich wieder an, eine Sinusfunktion zu verwenden.

$$w_0(x) = C \cdot \sin\left(\lambda \cdot \frac{x}{L}\right) \quad \text{mit} \quad w_0^2(x) = C^2 \cdot \sin^2\left(\lambda \cdot \frac{x}{L}\right)$$

$$w_0'(x) = C \cdot \frac{\lambda}{L} \cdot \cos\left(\lambda \cdot \frac{x}{L}\right) \quad \text{mit} \quad w_0'^2(x) = C^2 \cdot \left(\frac{\lambda}{L}\right)^2 \cdot \cos^2\left(\lambda \cdot \frac{x}{L}\right)$$

$$w_0''(x) = -C \cdot \left(\frac{\lambda}{L}\right)^2 \cdot \sin\left(\lambda \cdot \frac{x}{L}\right) \quad \text{mit} \quad w_0''^2(x) = C^2 \cdot \left(\frac{\lambda}{L}\right)^4 \cdot \sin^2\left(\lambda \cdot \frac{x}{L}\right)$$

$$\text{geltende Randbedingung: } w_0(L) = 0 = C \cdot \sin\left(\lambda \cdot \frac{L}{L}\right) = C \cdot \sin(\lambda) \Rightarrow \lambda_n = n \cdot \pi$$

Dann ergeben sich die Energieterme:

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \cdot E \cdot I \cdot \int_0^L w_0''^2(x) \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot E \cdot I \cdot C^2 \cdot \left(\frac{\lambda}{L}\right)^4 \cdot \int_0^L \sin^2\left(\lambda \cdot \frac{x}{L}\right) \cdot dx$$

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \cdot E \cdot I \cdot C^2 \cdot \left(\frac{\lambda}{L}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[x - \sin\left(\lambda \cdot \frac{x}{L}\right) \cdot \cos\left(\lambda \cdot \frac{x}{L}\right) \right]_0^L = \frac{E \cdot I \cdot C^2}{4} \cdot \left(\frac{\lambda}{L}\right)^3 \cdot L$$

$$\Pi_a = \frac{1}{2} \cdot F \cdot \int_0^L w_0'^2(x) \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot F \cdot C^2 \cdot \left(\frac{\lambda}{L}\right)^2 \cdot \int_0^L \cos^2\left(\lambda \cdot \frac{x}{L}\right) \cdot dx$$

$$\Pi_a = \frac{1}{2} \cdot F \cdot C^2 \cdot \left(\frac{\lambda}{L}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[x + \sin\left(\lambda \cdot \frac{x}{L}\right) \cdot \cos\left(\lambda \cdot \frac{x}{L}\right) \right]_0^L = \frac{F \cdot C^2}{4} \cdot \left(\frac{\lambda}{L}\right) \cdot L$$

$$\Pi_{kin} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A \cdot \omega^2 \cdot \int_0^L w^2(x) \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A \cdot \omega^2 \cdot C^2 \cdot \int_0^L \sin^2\left(\lambda \cdot \frac{x}{L}\right) \cdot dx$$

$$\Pi_{kin} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A \cdot \omega^2 \cdot C^2 \cdot \left(\frac{\lambda}{L}\right)^{-1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[x - \sin\left(\lambda \cdot \frac{x}{L}\right) \cdot \cos\left(\lambda \cdot \frac{x}{L}\right) \right]_0^L = \frac{\rho \cdot A \cdot \omega^2 \cdot C^2 \cdot L}{4 \cdot \left(\frac{\lambda}{L}\right)}$$

Daraus folgt dann die Energiebilanz:

$$\Pi_i - \Pi_a - \Pi_{kin} = 0 = \frac{E \cdot I \cdot C^2}{4} \cdot \left(\frac{\lambda}{L}\right)^3 \cdot L - \frac{F \cdot C^2}{4} \cdot \left(\frac{\lambda}{L}\right) \cdot L - \frac{\rho \cdot A \cdot \omega^2 \cdot C^2 \cdot L}{4 \cdot \left(\frac{\lambda}{L}\right)}$$

$$\Rightarrow E \cdot I \cdot \left(\frac{\lambda}{L}\right)^4 - F \cdot \left(\frac{\lambda}{L}\right)^2 - \rho \cdot A \cdot \omega^2 = 0$$

Die Eigenfrequenzen errechnen sich demzufolge mit:

$$\omega_i = \sqrt{\frac{E \cdot I}{\rho \cdot A} \cdot \left(\frac{\lambda_i}{L}\right)^4 - \frac{F}{\rho \cdot A} \cdot \left(\frac{\lambda_i}{L}\right)^2} = \left(\frac{\lambda_i}{L}\right) \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I}{\rho \cdot A} \cdot \left(\frac{\lambda_i}{L}\right)^2 - \frac{F}{\rho \cdot A}}$$

Für die kleinste Eigenfrequenz ω_1 wird hier $\lambda_1 = \pi$ eingesetzt:

$$\omega_1 = \left(\frac{\pi}{L}\right) \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I}{\rho \cdot A} \cdot \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 - \frac{F}{\rho \cdot A}} = \left(\frac{\pi}{L}\right) \cdot \sqrt{\frac{1}{\rho \cdot A} \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I \cdot \pi^2}{L^2} - F}}$$

Im Wurzelzeichen zeigt sich nun der bekannte Ausdruck für die Eulersche Knicklast mit:

$$F_{E1} = \frac{E \cdot I \cdot \pi^2}{L^2} \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = \left(\frac{\pi}{L}\right) \cdot \sqrt{\frac{1}{\rho \cdot A} \cdot \sqrt{F_{E1} - F}}$$

Daraus lässt sich nun ablesen, dass im Fall einer auftretenden Knicklast $F = F_K = F_{E1}$ die Eigenfrequenz ω_1 den Wert Null annimmt, quasi verschwinden würde. Damit liefert diese Gleichung eine weitere Erkenntnis über die Knicklast, dass diese erreicht wird, wenn die Grundeigenfrequenz des Systems auf Null schrumpft. Würde man statt einer Druckkraft eine Zugkraft einsetzen (Vorzeichenwechsel!), dann würden die Eigenfrequenzen mit steigender Zugkraft ebenfalls zunehmen (ähnlich wie die Frequenzen einer gespannten Saite).

Wird die Kraft jedoch $F = 0$ gesetzt, dann resultiert aus der Gleichung die Eigenwertbestimmung des unbelasteten Systems.

$$F = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_n = \left(\frac{n \cdot \pi}{L}\right) \cdot \sqrt{\frac{1}{\rho \cdot A} \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I \cdot n^2 \cdot \pi^2}{L^2}}} = \left(\frac{n \cdot \pi}{L}\right) \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I}{\rho \cdot A}}$$

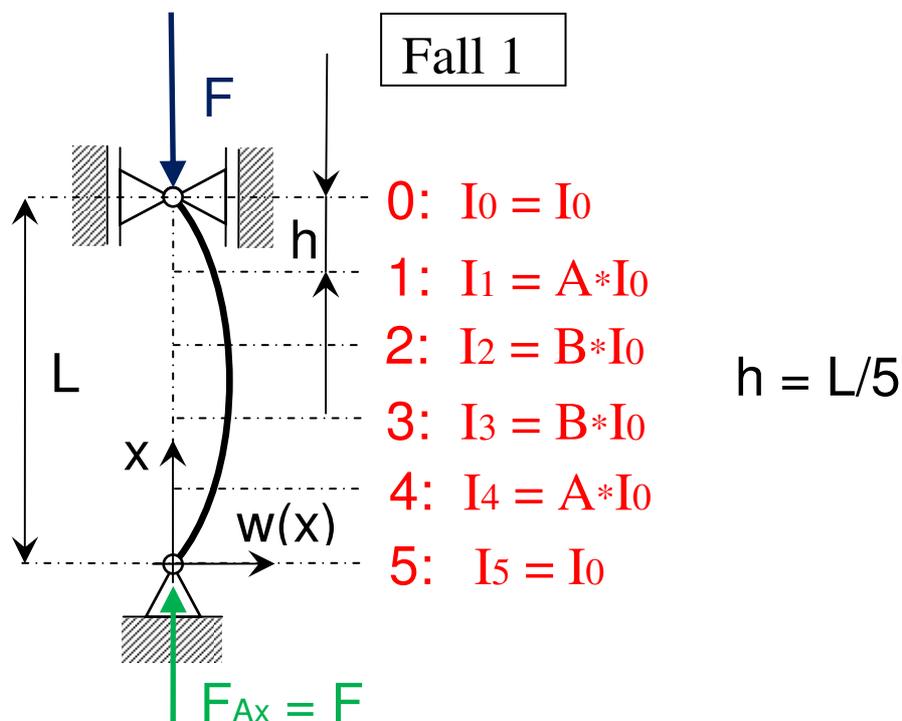
Das sind in der Tat die Eigenkreisfrequenzen des beidseitig gelenkig gelagerten Balkens mit konstantem Querschnitt und homogener Dichte.

1.9 Die Knicklastbestimmung mittels der Differenzenrechnung:

Für den Problemfall 1) des gelenkig gelagerten Druckstabes soll an dieser Stelle noch das Verfahren mittels der Differenzenrechnung angeführt werden. Mit dieser Methode wird ein Gleichungssystem aufgestellt, welches als Annäherung der Differentialgleichung genügen muss, die für diesen Knickfall gilt.

Vorgaben zur Methode der Differenzenrechnung:

- der Druckstab wird in gleich große Stücke zerlegt mit der Schrittweite $h = L/5$
- das Flächenmoment $I(x)$ soll entlang der x -Richtung variabel sein, jedoch zur Stabmitte $x = L/2$ weiterhin symmetrisch sein
- an den beiden Stabenden $x = 0$ und $x = L$ liegt das Bezugsflächenmoment I_0 vor
- an den Stellen $x = 1/5 L$ und $x = 4/5 L$ liegt das Bezugsflächenmoment $A \cdot I_0$ vor
- an den Stellen $x = 2/5 L$ und $x = 3/5 L$ liegt das Bezugsflächenmoment $B \cdot I_0$ vor



Das Differenzenverfahren bezogen auf die Differentialgleichung:

Die Differentialgleichung für den schon abgeleiteten Knickfall 1) lautet:

$$w''(x) + \alpha^2 \cdot w(x) = 0 \quad \text{mit} \quad \alpha^2 = \frac{F}{E \cdot I}$$

Da wir in diesem Beispiel aber auch eine in x-Richtung abhängige Variabilität bei dem Flächenmoment $I(x)$ vorliegen haben, verändert sich die Gleichung nun in diese Form:

$$w''(x) + \alpha^2 \cdot \frac{I_0}{I(x)} \cdot w(x) = 0 \quad \text{mit} \quad \alpha^2 = \frac{F}{E \cdot I_0}$$

Im nächsten Schritt gehen wir davon aus, dass es eine Biegelinie $w(x)$ gibt, die entsprechend der gestückelten Abstände h entlang der x-Richtung die Werte w_0, w_1, \dots, w_5 liefert. Bezogen auf diese Unbekannten wird ein Gleichungssystem aufgestellt, welches aus der Bedingung der Differentialgleichung folgt.

Um die Gleichungen aufstellen zu können, wird aber eine Methode benötigt, mit welcher man die zweite Ableitung der elastischen Linie $w(x)$ durch die Differenzbetrachtungen jener Biegelinien-Werte w_0, w_1, \dots, w_5 ausdrücken kann (nur angenähert!).

1. Differentialquotient wird durch Differenzenquotient angenähert:

$$\frac{dw(x)}{dx} \approx \frac{\Delta w(x)}{\Delta x} \quad \text{mit} \quad \Delta x = h$$

$$\frac{\Delta w(x)}{\Delta x} = \frac{w(x + \Delta x) - w(x)}{\Delta x} = \frac{w(x + h) - w(x)}{h}$$

Die Längendifferenz Δx wird dabei durch die Schrittweite h ausgedrückt.

2. Nochmalige Bildung des Differenzenquotienten für die zweite Ableitung:

$$\frac{d^2 w(x)}{dx^2} \approx \frac{\Delta(\Delta w(x))}{\Delta x^2} \quad \text{mit} \quad \Delta x^2 = h^2$$

$$\frac{\Delta(\Delta w(x))}{\Delta x^2} = \frac{\Delta(w(x + h) - w(x))}{h^2} = \frac{[w(x + h) - w(x)] - [w(x) - w(x - h)]}{h^2}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{w''(x) = \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \approx \frac{w(x + h) - 2 \cdot w(x) + w(x - h)}{h^2}}}$$

Das Aufstellen des Gleichungssystems:

Die Werte w_0, w_1, \dots, w_5 werden nun in die Differentialgleichung eingesetzt und ergeben dann insgesamt 6 Gleichungen, die zu Null werden müssen (homogenes Gleichungssystem).

$$\text{I:} \quad \frac{w_1 - 2 \cdot w_0 + w(0-h)}{h^2} + \alpha^2 \cdot \frac{1}{1} \cdot w_0 = 0$$

$$\text{II:} \quad \frac{w_2 - 2 \cdot w_1 + w_0}{h^2} + \alpha^2 \cdot \frac{1}{A} \cdot w_1 = 0$$

$$\text{III:} \quad \frac{w_3 - 2 \cdot w_2 + w_1}{h^2} + \alpha^2 \cdot \frac{1}{B} \cdot w_2 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{IV: } & \frac{w_4 - 2 \cdot w_3 + w_2}{h^2} + \alpha^2 \cdot \frac{1}{B} \cdot w_3 = 0 \\ \text{V: } & \frac{w_5 - 2 \cdot w_4 + w_3}{h^2} + \alpha^2 \cdot \frac{1}{A} \cdot w_4 = 0 \\ \text{VI: } & \frac{w(L+h) - 2 \cdot w_5 + w_4}{h^2} + \alpha^2 \cdot \frac{1}{1} \cdot w_5 = 0 \end{aligned}$$

Die Gleichungen I und VI beschreiben die Fortsetzung über die Stabenden hinaus und werden in diesem Fall nicht benötigt, wobei $w_0 = 0$ und $w_5 = 0$ sein muss (Randbedingungen!). Die Gleichungen II ... V liefern dagegen ein Gleichungssystem für die Unbekannten w_1, \dots, w_4 . Die Koeffizientenmatrix zu diesen Unbekannten lautet:

$$K = \begin{pmatrix} \frac{\alpha^2 \cdot h^2}{A} - 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{\alpha^2 \cdot h^2}{B} - 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{\alpha^2 \cdot h^2}{B} - 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\alpha^2 \cdot h^2}{A} - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \varepsilon_2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \varepsilon_2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \varepsilon_1 \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } \varepsilon_1 = \frac{\alpha^2 \cdot h^2}{A} - 2 \quad \text{und} \quad \varepsilon_2 = \frac{\alpha^2 \cdot h^2}{B} - 2$$

Da es sich um ein homogenes Gleichungssystem handelt, muss die Determinante hinsichtlich der Koeffizientenmatrix verschwinden bzw. zu Null werden.

$$\det \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \varepsilon_2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \varepsilon_2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \varepsilon_1 \end{vmatrix} = \varepsilon_1 \cdot \det \begin{vmatrix} \varepsilon_2 & 1 & 0 \\ 1 & \varepsilon_2 & 1 \\ 0 & 1 & \varepsilon_1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \det \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 1 \\ 0 & 1 & \varepsilon_1 \end{vmatrix} = \varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 - 2 \cdot \varepsilon_1 \varepsilon_2 - \varepsilon_1^2 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 0 = \varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 - 2 \cdot \varepsilon_1 \varepsilon_2 - \varepsilon_1^2 + 1 = [(\varepsilon_1 \varepsilon_2 - 1) - \varepsilon_1] \cdot [(\varepsilon_1 \varepsilon_2 - 1) + \varepsilon_1]$$

$$\Rightarrow a) \quad 0 = (\varepsilon_1 \varepsilon_2 - 1) - \varepsilon_1$$

$$\Rightarrow b) \quad 0 = (\varepsilon_1 \varepsilon_2 - 1) + \varepsilon_1$$

Es folgen somit zwei quadratische Gleichungen nach denen aufgelöst werden muss. Dazu ist es noch nötig, beispielsweise die Unbekannte ε_2 durch ε_1 auszudrücken.

Es gilt gemäß der gewählten Definitionen für ε_1 und ε_2 :

$$\varepsilon_2 = \frac{\alpha^2 \cdot h^2}{B} - 2 = (\varepsilon_1 + 2) \cdot \frac{A}{B} - 2 = \frac{A}{B} \cdot \varepsilon_1 + 2 \cdot \frac{A}{B} - 2$$

$$\Rightarrow a) \quad 0 = \frac{A}{B} \cdot \varepsilon_1^2 + \left(2 \cdot \frac{A}{B} - 2\right) \cdot \varepsilon_1 - 1 - \varepsilon_1 = \frac{A}{B} \cdot \varepsilon_1^2 + \left(2 \cdot \frac{A}{B} - 3\right) \cdot \varepsilon_1 - 1$$

$$\Rightarrow b) \quad 0 = \frac{A}{B} \cdot \varepsilon_1^2 + \left(2 \cdot \frac{A}{B} - 2\right) \cdot \varepsilon_1 - 1 + \varepsilon_1 = \frac{A}{B} \cdot \varepsilon_1^2 + \left(2 \cdot \frac{A}{B} - 1\right) \cdot \varepsilon_1 - 1$$

$$\Rightarrow a) \quad 0 = \varepsilon_1^2 + \left(2 - 3 \cdot \frac{B}{A}\right) \cdot \varepsilon_1 - \frac{B}{A}$$

$$\Rightarrow b) \quad 0 = \varepsilon_1^2 + \left(2 - 1 \cdot \frac{B}{A}\right) \cdot \varepsilon_1 - \frac{B}{A}$$

Hieraus folgen nun die 4 Nullstellen für ε_1 :

$$\varepsilon_{11} = \frac{\frac{B}{A} - 2}{2} - \sqrt{\frac{\left(\frac{B}{A} - 2\right)^2}{4} + \frac{B}{A}}$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{\frac{B}{A} - 2}{2} + \sqrt{\frac{\left(\frac{B}{A} - 2\right)^2}{4} + \frac{B}{A}}$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{3 \cdot \frac{B}{A} - 2}{2} - \sqrt{\frac{\left(3 \cdot \frac{B}{A} - 2\right)^2}{4} + \frac{B}{A}}$$

$$\varepsilon_{14} = \frac{3 \cdot \frac{B}{A} - 2}{2} + \sqrt{\frac{\left(3 \cdot \frac{B}{A} - 2\right)^2}{4} + \frac{B}{A}}$$

$$\text{nun ist:} \quad \varepsilon_1 = \frac{\alpha^2 \cdot h^2}{A} - 2 \quad \Rightarrow (\varepsilon_1 + 2) \cdot A = \alpha^2 \cdot h^2 = \frac{F \cdot h^2}{E \cdot I_0} = \frac{F \cdot L^2}{E \cdot I_0 \cdot 25}$$

Damit erhält man die ersten 4 Eigenwerte bzgl. der kritischen Kraft F :

$$\Rightarrow \underline{\underline{F_{kr} = (\varepsilon_1 + 2) \cdot \frac{A}{L^2} \cdot E \cdot I_0 \cdot 25}}$$

Einsetzen von Beispielwerten für A und B:

1) Stab soll einheitlichen Querschnitt mit konstantem I_0 haben, d.h. $A=B=1$

$$\varepsilon_{11} = \frac{1-2}{2} - \sqrt{\frac{(1-2)^2}{4} + 1} = -1,618$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{1-2}{2} + \sqrt{\frac{(1-2)^2}{4} + 1} = 0,618$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{3 \cdot 1 - 2}{2} - \sqrt{\frac{(3 \cdot 1 - 2)^2}{4} + 1} = -0,618$$

$$\varepsilon_{14} = \frac{3 \cdot 1 - 2}{2} + \sqrt{\frac{(3 \cdot 1 - 2)^2}{4} + 1} = 1,618$$

Der kleinste Eigenwert ε_{11} liefert dann die kritische Kraft:

$$\Rightarrow F_{kr} = (\varepsilon_{11} + 2) \cdot \frac{A}{L^2} \cdot E \cdot I_0 \cdot 25 = (-1,618 + 2) \cdot \frac{1}{L^2} \cdot E \cdot I_0 \cdot 25 = \underline{\underline{9,55 \cdot \frac{E \cdot I_0}{L^2}}}$$

Zum Vergleich sei noch einmal die theoretisch hergeleitete Eulersche Knicklast angegeben:

$$F_{E1} = \frac{\pi^2}{L^2} \cdot E \cdot I \approx 9,87 \cdot \frac{E \cdot I}{L^2}$$

D.h., das angenäherte Ergebnis liegt um 3,2% unter dem theoretisch korrekten Wert.

Hinweis:

Eine direktere Berechnung der vier Lösungen von ε_1 wäre auch möglich gewesen, wenn man in der Koeffizientenmatrix $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ eingesetzt hätte. Das hätte zu einer biquadratischen Gleichung geführt:

$$\det \begin{vmatrix} \varepsilon & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \varepsilon & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \varepsilon & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \varepsilon \end{vmatrix} = \varepsilon^4 - 3 \cdot \varepsilon^2 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{1,2,3,4} = \mp \sqrt{\frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 1}} = \mp \sqrt{\begin{matrix} 2,618 \\ 0,382 \end{matrix}} = \begin{matrix} -1,618 \\ -0,618 \\ 0,618 \\ 1,618 \end{matrix}$$

- 2) **Stab soll kontinuierlich wachsendes Flächenmoment $I(x)$ haben, mit $A=2$ und $B=3$**

$$\varepsilon_{11} = \frac{3/2 - 2}{2} - \sqrt{\frac{(3/2 - 2)^2}{4} + \frac{3}{2}} = -1,5$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{3/2 - 2}{2} + \sqrt{\frac{(3/2 - 2)^2}{4} + \frac{3}{2}} = 1$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{9/2 - 2}{2} - \sqrt{\frac{(9/2 - 2)^2}{4} + \frac{3}{2}} = -0,5$$

$$\varepsilon_{14} = \frac{9/2 - 2}{2} + \sqrt{\frac{(9/2 - 2)^2}{4} + \frac{3}{2}} = 3$$

Der kleinste Eigenwert ε_{11} liefert dann die kritische Kraft:

$$\Rightarrow F_{kr} = (\varepsilon_{11} + 2) \cdot \frac{A}{L^2} \cdot E \cdot I_0 \cdot 25 = (-1,5 + 2) \cdot \frac{2}{L^2} \cdot E \cdot I_0 \cdot 25 = \underline{\underline{25 \cdot \frac{E \cdot I_0}{L^2}}}$$

Es sollte hier an dieser Stelle noch darauf hingewiesen werden, dass es sich bei dem Wertezuwachs des Flächenmomentes bis zur Stabmitte auch um dasjenige $I(x)$ handelt, welches für die betrachtete Ausknickrichtung verantwortlich ist. Es ist zudem noch zu berücksichtigen, ob mit der Änderung des Flächenmomentes nicht plötzlich eine andere Ausknickrichtung relevant wird, weil sich dort eine niedrigere Stabsteifigkeit zeigen würde, denn eine Änderung des Querschnittes verändert natürlich die Flächenmomente in beiden Hauptachsen bzw. Ausknickrichtungen.

2. Dimensionierung von Knickstäben

2.1 Die Euler-Hyperbel und der Tetmajer-Bereich:

Bei all den zuvor behandelten Möglichkeiten zur Bestimmung der Knicklast wurde eine Betrachtung außer Acht gelassen. Denn auf der einen Seite müssen die Knickstäbe eines Tragwerkes rechnerisch überprüft werden, dass diese nicht die kritische Last erreichen (Sicherheitsfaktoren mit eingerechnet!), auf der anderen Seite muss aber bestätigt werden, dass die Druckkräfte in den belasteten Querschnitten nicht schon die zulässigen Spannungen übertroffen haben. Das ist natürlich dann eine Frage der "Schlankheit" dieser Stäbe. Sehr schlanke Stäbe (sehr lang gegenüber dem Flächenmoment 2. Grades) sind empfindlich bzgl. des Ausknickens. Weniger schlanke Stäbe (kurze Länge gegenüber Flächenmoment 2. Grades) neigen dagegen nicht mehr zum Knicken, sondern werden ab einer bestimmten Drucklast plastisch verformt. Eine Klärung der Bauteilbemessungen/-beanspruchungen muss also immer in doppelter Hinsicht erfolgen, wozu der Begriff des so genannten Schlankheitsgrades λ als Parameter eingeführt werden soll. In diesem Zusammenhang muss zuvor die Definition des Trägheitsradius (i_y , i_z) vorangestellt werden.

Trägheitsradius:

Besitzt ein Querschnitt die Fläche A und ein auf die Achsen y oder z bezogenes Flächenmoment 2. Grades I_y oder I_z , dann sind die entsprechend dazugehörigen Trägheitsradien i_y oder i_z :

$$I_y = i_y^2 \cdot A \quad I_z = i_z^2 \cdot A \quad I = i^2 \cdot A$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \quad i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} \quad i = \sqrt{\frac{I}{A}}$$

Im Folgenden soll wiederum nur das kleinste Flächenmoment I berücksichtigt werden (wegen Knickung), so dass sich der zugehörige Trägheitsradius i berechnet.

Der Schlankheitsgrad λ wird dann als Verhältnis aus Knicklänge L_K und des Trägheitsradius i errechnet:

$$\lambda = \frac{L_K}{i} \quad \Rightarrow \quad L_K^2 = i^2 \cdot \lambda^2$$

wobei dann:

$$\text{Fall 1: } \Rightarrow L_K = L \cdot 1 \quad \text{Fall 2: } \Rightarrow L_K = L \cdot 2$$

$$\text{Fall 3: } \Rightarrow L_K = L \cdot 0,5 \quad \text{Fall 4: } \Rightarrow L_K = L \cdot 0,699$$

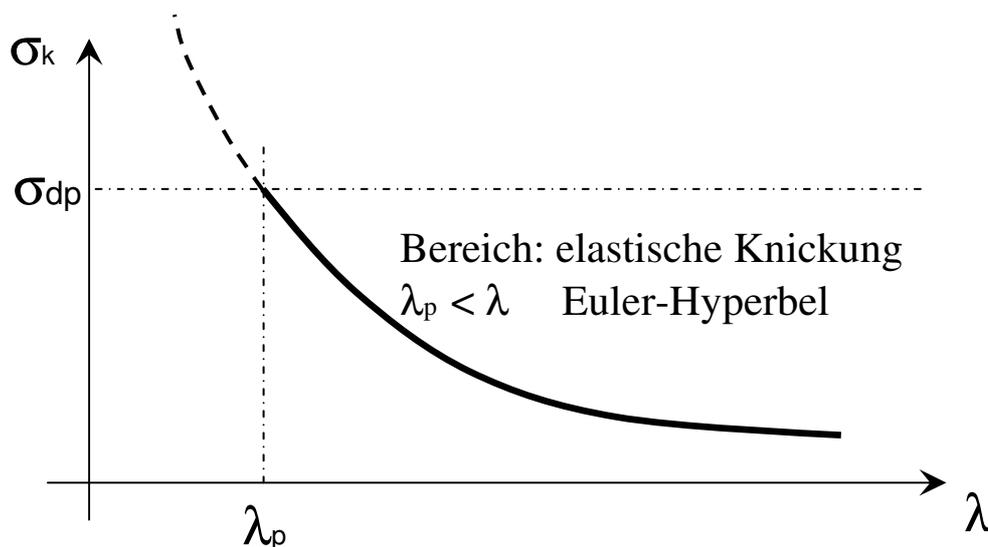
Die Eulerschen Knicklasten errechnen sich dann mit:

$$F_{Ei} = \frac{\pi^2}{L_{ki}^2} \cdot E \cdot I = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{\lambda^2 \cdot i^2} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot A}{\lambda^2}$$

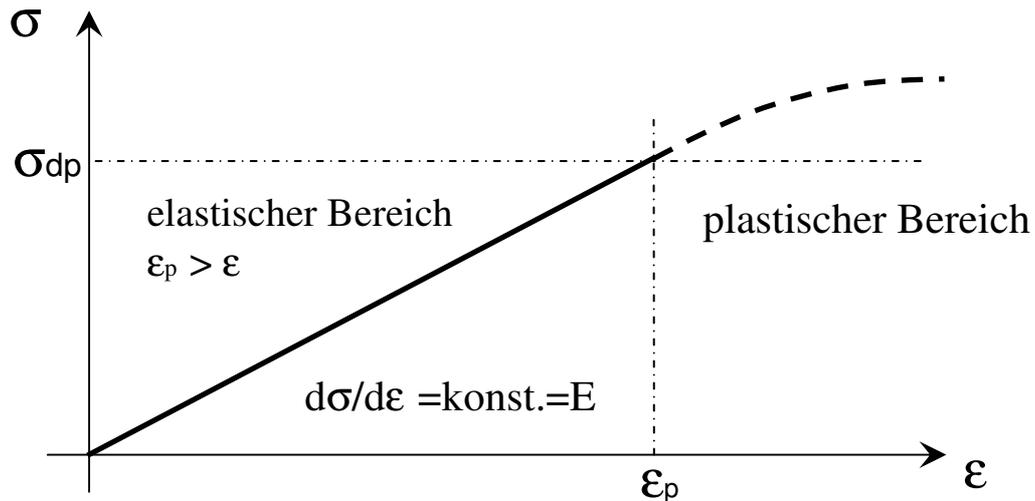
Die auf dem Querschnitt A gemittelte Druckspannung ist dann:

$$\sigma_{ki} = \frac{F_{Ei}}{A} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2} = \sigma_{ki}(\lambda)$$

Die von λ abhängige Beziehung beschreibt die Euler-Hyperbel. Der Gültigkeitsbereich der Euler-Hyperbel beschränkt sich für die Werte λ (durchgezogener Kurvenverlauf), die noch nicht den "Grenزشlankheitsgrad" λ_p unterschritten haben, da ab dann die zulässige Druckfestigkeit σ_p des Werkstoffs erreicht wird.



Der Wert σ_{dp} ist die maximale Druckspannung im Gültigkeitsbereich des Hookschen Gesetzes (Geradenverlauf im Spannungs-Dehnungs-Diagramm σ - ϵ).



Es gibt daher die Fallunterscheidung:

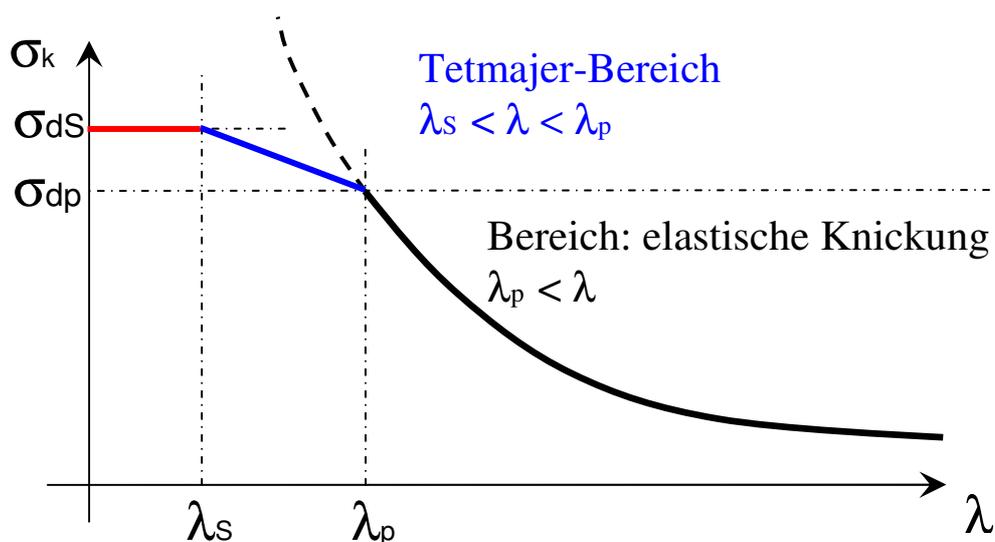
$\lambda < \lambda_p \rightarrow$ unelastische Knickung

$\lambda \geq \lambda_p \rightarrow$ elastische Knickung

Im Bereich $0 < \lambda < \lambda_p$ ist die zugeordnete zulässige Druckfestigkeit σ_k ein vom Material abhängiger Wert, der sich aus Versuchen ergibt. Dieser Bereich wurde nach Tetmajer benannt. Ergebnisse haben gezeigt, dass dieser Bereich zumeist durch einen linearen Verlauf (Tetmajer-Gerade) gut beschrieben werden kann, der durch zwei Werkstoffkennwerte definiert wird.

$$\sigma_k = a - b \cdot \lambda \quad : \text{Tetmajer - Gerade}$$

Diese Gerade geht dann schließlich in eine Horizontale über, wenn die zulässige Quetschgrenze bzw. Druckfestigkeit des Werkstoffs erreicht ist ($\sigma_{d \text{ zul}} = \sigma_{dS}$).



Werkstoffkennwerte für den Tetmajer-Bereich: (a,b - Werte in N/mm²)

Baustahl S235 JRG2 (= St37):	a = 310	b = 1,14	$\lambda_p = 104$
Baustahl S355 J2G3 (= St52):	a = 335	b = 0,62	$\lambda_p = 89$
	mit einem E-Modul = 210 000 N/mm ²		
Nadelholz	a = 29,3	b = 0,94	$\lambda_p = 100$
	mit einem E-Modul = 10 000 N/mm ²		

mit dem Grenzschlankheitsgrad:
$$\sigma_{dp} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda_p^2} \quad \Rightarrow \quad \lambda_p = \pi \cdot \sqrt{\frac{E}{\sigma_{dp}}}$$

Bei Grauguss verwendet man im Tetmajer-Bereich hingegen keinen linearen Verlauf mehr, sondern nähert sich hier mit einem parabolischen Verlauf an, gemäß der Formel:

$$\sigma_k = [776 - 12 \cdot \lambda + 0,053 \cdot \lambda^2] \text{ N/mm}^2 \quad \text{Grauguss}$$

mit einem E-Modul = 100 000 N/mm² und $\lambda_p = 80$

Die noch einzurechnenden Sicherheitsfaktoren bzw. Knicksicherheiten werden je nach Anwendungsbereich unterschieden. Im allgemeinen Maschinenbau rechnet man mit folgenden Sicherheiten:

im elastischen Bereich: $S_K = 5 \dots 10$
 im unelastischen Bereich: $S_K = 3 \dots 8$

Im Tetmajer-Bereich $\lambda_s < \lambda < \lambda_p$ muss daher gelten:

$$\frac{F}{A} \leq \frac{\sigma_k}{S_K} = \frac{a - b \cdot \lambda}{S_K}$$

mit $\lambda = L_K \cdot \sqrt{\frac{A}{I}}$

D.h., auf beiden Seiten der Gleichung stehen Ausdrücke, die vom Querschnitt (Geometrie!) des Stabes abhängen. Dabei stehen die Fläche A und das Flächenmoment 2. Grades I in einer etwas komplexeren Beziehung, weil hier allein die geometrische Gestalt des Querschnitts zu unterschiedlichen Relationen A/I führt.

Im Bereich $\lambda \leq \lambda_s$ muss dagegen gelten:

$$\frac{F}{A} \leq \frac{\sigma_{dS}}{S_K} = \frac{\sigma_{d zul}}{S_K}$$

Auslegung gemäß der werkstoffabhängigen Quetsch- oder Bruchgrenze.

2. Tabelle: Werkstoff = Baustahl S355 J2G3 (= St52):

Querschnitt gemäß eines Trägerprofils (z.B T-Träger, I-Träger, L-Träger ...)

ω -Knickzahlen:

λ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	λ
20	1,06	1,06	1,07	1,07	1,08	1,08	1,09	1,09	1,10	1,11	20
30	1,11	1,12	1,12	1,13	1,14	1,15	1,15	1,16	1,17	1,18	30
40	1,19	1,19	1,20	1,21	1,22	1,23	1,24	1,25	1,26	1,27	40
50	1,28	1,30	1,31	1,32	1,33	1,35	1,36	1,37	1,39	1,40	50
60	1,41	1,43	1,44	1,46	1,48	1,49	1,51	1,53	1,54	1,56	60
70	1,58	1,60	1,62	1,64	1,66	1,68	1,70	1,72	1,74	1,77	70
80	1,79	1,81	1,83	1,86	1,88	1,91	1,93	1,95	1,98	2,01	80
90	2,05	2,10	2,14	2,19	2,24	2,29	2,33	2,38	2,43	2,48	90
100	2,53	2,58	2,64	2,69	2,74	2,79	2,85	2,90	2,95	3,01	100
110	3,06	3,12	3,18	3,23	3,29	3,35	3,41	3,47	3,53	3,59	110
120	3,65	3,71	3,77	3,83	3,89	3,96	4,02	4,09	4,15	4,22	120
130	4,28	4,35	4,41	4,48	4,55	4,62	4,69	4,75	4,82	4,89	130
140	4,96	5,04	5,11	5,18	5,25	5,33	5,40	5,47	5,55	5,62	140
150	5,70	5,78	5,85	5,93	6,01	6,09	6,16	6,24	6,32	6,40	150
160	6,48	6,57	6,65	6,73	6,81	6,90	6,98	7,06	7,15	7,23	160
170	7,32	7,41	7,49	7,58	7,67	7,76	7,85	7,94	8,03	8,12	170
180	8,21	8,30	8,39	8,48	8,58	8,67	8,76	8,86	8,95	9,05	180
190	9,14	9,24	9,34	9,44	9,53	9,63	9,73	9,83	9,93	10,03	190
200	10,13	10,23	10,34	10,44	10,54	10,65	10,75	10,85	10,96	11,06	200
210	11,17	11,28	11,38	11,49	11,60	11,71	11,82	11,93	12,04	12,15	210
220	12,26	12,37	12,48	12,60	12,71	12,82	12,94	13,05	13,17	13,28	220
230	13,40	13,52	13,63	13,75	13,87	13,99	14,11	14,23	14,35	14,47	230
240	14,59	14,71	14,83	14,96	15,08	15,20	15,33	15,45	15,58	15,71	240
250	15,83										250

3. Tabelle: Werkstoff = Baustahl S235 JRG2 (= St37)

Querschnitt ist ein Rundrohr

ω -Knickzahlen:

λ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	λ
20	1,00	1,00	1,00	1,00	1,01	1,01	1,01	1,02	1,02	1,02	20
30	1,03	1,03	1,04	1,04	1,04	1,05	1,05	1,05	1,06	1,06	30
40	1,07	1,07	1,08	1,08	1,09	1,09	1,10	1,10	1,11	1,11	40
50	1,12	1,13	1,13	1,14	1,15	1,15	1,16	1,17	1,17	1,18	50
60	1,19	1,20	1,20	1,21	1,22	1,23	1,24	1,25	1,26	1,27	60
70	1,28	1,29	1,30	1,31	1,32	1,33	1,34	1,35	1,36	1,37	70
80	1,39	1,40	1,41	1,42	1,44	1,46	1,47	1,48	1,50	1,51	80
90	1,53	1,54	1,56	1,58	1,59	1,61	1,63	1,64	1,66	1,68	90
100	1,70	1,73	1,76	1,79	1,83	1,87	1,90	1,94	1,97	2,01	100
110	2,05	2,08	2,12	2,16	2,20	2,23	weiter wie Tabelle 1				110

4. Tabelle: Werkstoff = Baustahl S355 J2G3 (= St52):

Querschnitt ist ein Rundrohr

ω -Knickzahlen:

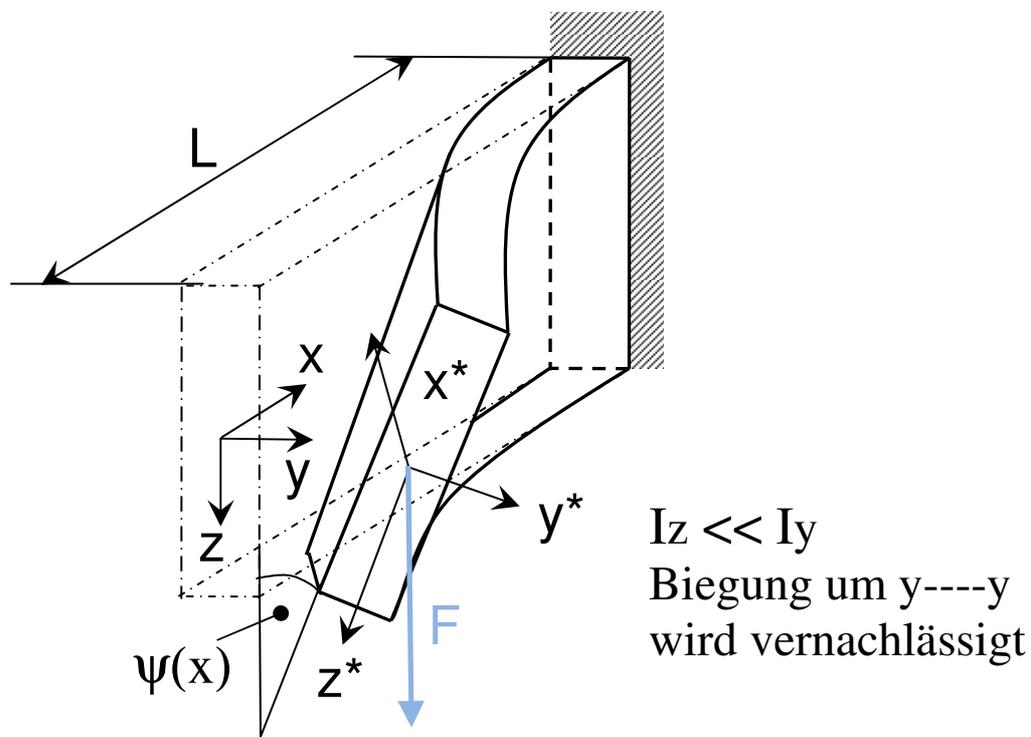
λ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	λ
20	1,02	1,02	1,02	1,03	1,03	1,03	1,04	1,04	1,05	1,05	20
30	1,05	1,06	1,06	1,07	1,07	1,08	1,08	1,09	1,10	1,10	30
40	1,11	1,11	1,12	1,13	1,13	1,14	1,15	1,16	1,16	1,17	40
50	1,18	1,19	1,20	1,21	1,22	1,23	1,24	1,25	1,26	1,27	50
60	1,28	1,30	1,31	1,32	1,33	1,35	1,36	1,38	1,39	1,41	60
70	1,42	1,44	1,46	1,47	1,49	1,51	1,53	1,55	1,57	1,59	70
80	1,62	1,66	1,71	1,75	1,79	1,83	1,88	1,92	1,97	2,01	80
90	2,05						weiter wie in Tabelle 2				90

3. Das Kippen von Trägern

3.1 Das Kippen eines auf Biegung beanspruchten brettförmigen Kragbalkens:

Bei Kragträgern mit verhältnismäßig großer Querschnittshöhe (gegenüber der Breite), kann bei bestimmten Beanspruchungen (wie z.B. die einer Biegelast am Kragende) eine Instabilität auftreten, wenn dieser brettförmige Träger zur Seite auszubrechen droht. In diesem Fall wird der Träger neben der Biegung auch auf Torsion beansprucht. Bei einer zentral in der Symmetrieachse des Querschnitts wirkenden Biegelast F tritt das Moment der Torsionsbelastung erst mit der Instabilität bzw. dem Kippen des Trägers ein.

Um jedoch diese Erscheinungsform des kippenden Biegeträgers behandeln zu können, soll am Träger schon die drohend ausgekippte Lage des Kragbalkens betrachtet werden. Dabei wird im Folgenden die Biegung um die Achse y - y vernachlässigt, da wir von einer relativ großen Querschnittshöhe ausgehen wollen.



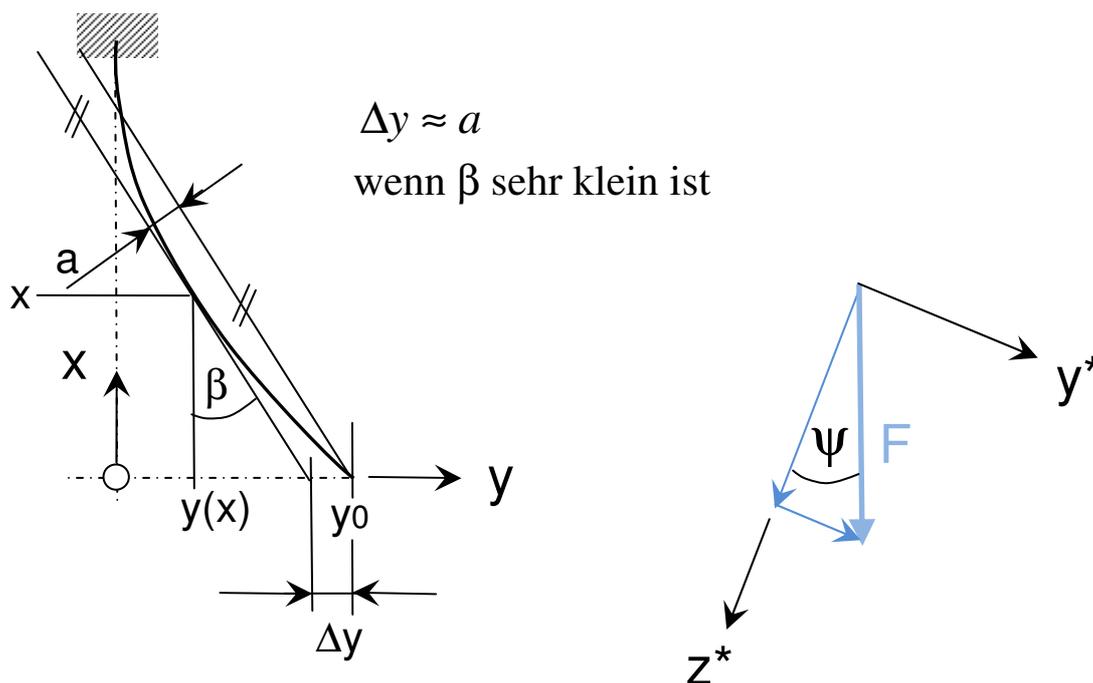
Aus der Biegebeanspruchung folgt die elastische Linie wie folgt:

$$E \cdot I_z \cdot y''(x) \approx -M_{b_{z^*(x)}} = F \cdot \sin \psi(x) \cdot x$$

Da $\psi(x)$ aber sehr klein ist, gilt $\sin \psi(x) \approx \psi(x)$.

$$\Rightarrow E \cdot I_z \cdot y''(x) = F \cdot \psi(x) \cdot x$$

Als Nächstes soll der Verlauf der Trägerachse in Blickrichtung der Kraft F dargestellt werden:



Das Torsionsmoment errechnet sich hierbei über den Versatzabstand a :

$$a \approx \Delta y = y_0 - y(x) - x \cdot \tan \beta = y_0 - y(x) + x \cdot y'(x) > 0$$

$$\Rightarrow M_t(x) = F \cdot a(x) = F \cdot [y_0 - y(x) + x \cdot y'(x)]$$

Das Torsionsmoment kann aber auch über die allgemeine Torsionstheorie der Drillung ausgedrückt werden. Die Drillung ist dabei die Änderung des Verdrehwinkels ψ nach der Koordinate x , also entlang der theoretischen Längsachse des Trägers (unverformt).

$$M_t(x) = -G \cdot I_t \cdot \frac{d\psi}{dx} \quad G : \text{Schubmodul}; \quad I_t : \text{Torsionflächenmoment des Querschnitts}$$

$$G \cdot I_t = \text{const.}$$

Das negative Vorzeichen ergibt sich aus der Tatsache, dass der Verdrehwinkel ψ mit steigendem x -Wert kleiner wird bis er an der Einspannstelle ($x = L$) verschwindet.

$$\Rightarrow M_t(x) = F \cdot \left[y_0 - y(x) + x \cdot \frac{dy}{dx} \right] = -G \cdot I_t \cdot \frac{d\psi}{dx} \quad | \cdot \frac{d}{dx}$$

$$\Rightarrow F \cdot \left[-\frac{dy}{dx} + x \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} \right] = -G \cdot I_t \cdot \frac{d^2\psi}{dx^2}$$

$$\Rightarrow F \cdot x \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = F \cdot x \cdot y''(x) = -G \cdot I_t \cdot \frac{d^2\psi}{dx^2}$$

Wie anfangs schon darauf hingewiesen wurde, errechnet sich der Verdrehwinkel über die folgende Aussage:

$$E \cdot I_z \cdot y''(x) = F \cdot \psi(x) \cdot x$$

$$\Rightarrow y''(x) = \frac{F \cdot \psi(x) \cdot x}{E \cdot I_z}$$

Die zweite Ableitung von $y(x)$ kann nun wieder in die abgeleitete Gleichung des Torsionsmoments eingesetzt werden und ergibt dann:

$$\Rightarrow F \cdot x \cdot y''(x) = F \cdot x \cdot \frac{F \cdot \psi(x) \cdot x}{E \cdot I_z} = -G \cdot I_t \cdot \frac{d^2\psi}{dx^2}$$

$$\Rightarrow \frac{(F \cdot x)^2}{E \cdot I_z} \cdot \psi(x) = -G \cdot I_t \cdot \frac{d^2\psi}{dx^2}$$

Da es sich um einen brettförmigen Träger handelt, wird zur genaueren Berechnung eine Korrektur vorgenommen, die sich auf den E-Modul beziehen lässt. Der E-Modul nimmt dann die Form an wie es in der „Kirchhoffschen Plattentheorie“ bei der Plattensteifigkeit N zum Ausdruck kommt.

$$N = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \frac{t^3}{12} \quad \text{mit der Plattendicke } t$$

E wird daher ersetzt durch $\frac{E}{1-\nu^2}$, wobei ν die Querkontraktionsziffer darstellt.

Daraus folgt nun die Gleichung:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{F^2 \cdot (1-\nu^2)}{E \cdot I_z \cdot G \cdot I_t} \cdot x^2 \cdot \psi(x) = 0 \quad \text{mit} \quad \lambda^4 = \frac{F^2 \cdot (1-\nu^2)}{E \cdot I_z \cdot G \cdot I_t}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\psi}{dx^2} + \lambda^4 \cdot x^2 \cdot \psi(x) = 0$$

Es liegt eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit variablem Koeffizienten vor.

Lösungsansatz für $\psi(x)$:

Potenzreihenansatz:

$$\psi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot x^k = c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2 + c_3 \cdot x^3 + \dots$$

Setzt man diesen Ansatz in die Differentialgleichung ein, dann liefert das den Ausdruck:

$$c_2 \cdot 1 \cdot 2 + c_3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot x + c_4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot x^2 + c_5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot x^3 + \dots + \lambda^4 \cdot [c_0 \cdot x^2 + c_1 \cdot x^3 + c_2 \cdot x^4 + c_3 \cdot x^5 \dots] = 0$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert dann:

$$\begin{aligned} c_2 &= 0 & c_5 &= -\lambda^4 \cdot \frac{c_1}{4 \cdot 5} \\ c_3 &= 0 & c_6 &= -\lambda^4 \cdot \frac{c_2}{5 \cdot 6} = 0 \\ c_4 &= -\lambda^4 \cdot \frac{c_0}{3 \cdot 4} & c_7 &= 0 \end{aligned}$$

Es ist zu erkennen, dass alle Konstanten sich in Abhängigkeit von c_0 und c_1 berechnen lassen, welche im Potenzreihenansatz für $\psi(x)$ Folgendes ergeben:

$$\psi(x) = c_0 \cdot \left[1 - \frac{\lambda^4 \cdot x^4}{3 \cdot 4} + \frac{\lambda^8 \cdot x^8}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8} \mp \dots \right] + c_1 \cdot \left[x - \frac{\lambda^4 \cdot x^5}{4 \cdot 5} + \frac{\lambda^8 \cdot x^9}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9} \mp \dots \right]$$

Die beiden Konstanten erhält man dann durch zwei Randbedingungen.

1. Randbedingung: (an Ende des Trägers bei der Kraft F)

Da an dieser Stelle noch kein Torsionsmoment wirkt, verschwindet auch die erste Ableitung des Verdrehwinkels bei $x=0$.

$$M_t(x=0) = -G \cdot I_t \cdot \left(\frac{d\psi}{dx} \right)_{x=0} = 0 \quad \text{womit} \quad \psi'(0) = 0 \quad \text{und} \quad \underline{\underline{c_1 = 0}}$$

2. Randbedingung: (an der Einspannstelle des Trägers $x = L$)

$$\psi(L) = 0 \quad \text{mit} \quad \kappa = \lambda^4 \cdot L^4$$

$$\Rightarrow \psi(0) = 0 = c_0 \cdot \left[1 - \frac{\kappa}{3 \cdot 4} + \frac{\kappa^2}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8} - \frac{\kappa^3}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 12} \pm \dots \right]$$

Damit Null herauskommt, muss der Ausdruck in der eckigen Klammer ebenfalls zu Null werden. Dabei handelt es sich um die „Bestimmungsgleichung des Eigenwertes κ “. Ein erste Annäherung erhält man, wenn nur die Glieder bis κ^2 berücksichtigt werden. Dann resultiert aus der Bestimmungsgleichung eine quadratische Gleichung, wobei dann der niedrigste Wert als Lösung zu gelten hat (hier κ_1).

$$0 = \left[1 - \frac{\kappa}{3 \cdot 4} + \frac{\kappa^2}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8} \right] \Rightarrow \kappa^2 - 56 \cdot \kappa + 672 = 0$$

$$\kappa_1 = \underline{\underline{17,4}}$$

$$\kappa_2 = 38,6$$

Eine etwas genauere Lösung liefert das folgende Iterationsverfahren:

gefordert ist:

$$\left[1 - \frac{\kappa}{3 \cdot 4} + \frac{\kappa^2}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8} - \frac{\kappa^3}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 12} \pm \dots \right] = 0$$

Umgestellt nach der ersten Potenz von κ :

$$\left[1 + \frac{\kappa^2}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8} - \frac{\kappa^3}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 12} \pm \dots \right] = \frac{\kappa}{3 \cdot 4}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{3 \cdot 4 \cdot \left[1 + \frac{\kappa_i^2}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8} - \frac{\kappa_i^3}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 12} \pm \dots \right] = \kappa_{i+1} = \varphi(\kappa)}}$$

Für die Umgebung $\kappa \pm \varepsilon$ liegt eine Konvergenzbedingung vor $|\varphi'(\kappa)| < 1$

Das liefert nun den Grenzwert: $\underline{\underline{\kappa \approx 16,2}}$

$$\kappa = \lambda^4 \cdot L^4 = \frac{F^2 \cdot (1 - \nu^2) \cdot L^4}{E \cdot I_z \cdot G \cdot I_t}$$

Und somit die Lösung für die kritische Biegelast F_K :

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{F_K = \frac{4,023}{L^2} \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I_z \cdot G \cdot I_t}{(1 - \nu^2)}}}}$$

„kritische Kipplast für den brettförmigen Kragbalken“

Es muss jedoch beachtet werden:

- Bzgl. der Torsion wird die Wölbkrafttorsion vernachlässigt, obwohl an der Einspannstelle eine Verwölbung des Querschnittes verhindert wird.
- $I_y \gg I_z$, somit wird die Biegebeanspruchung in y-Richtung vernachlässigt.
- Die Last F greift in der Trägerachse an.

3.2 Weitere Belastungsfälle bei brettförmigen Trägern bzgl. des Kippens:

Es gibt zu dem im Abschnitt 3.1 dargestellten Problem natürlich viele andere Belastungsarten eines kippenden Trägers. So kann der Träger auch rein über ein Lastmoment oder auch über eine Streckenlast beansprucht werden. Um auch diese Fälle behandeln zu können, wäre es sehr praktisch, wenn mit den zuvor hergeleiteten Gleichungen eine allgemeine Beschreibung in Form einer Differentialgleichung vorliegen würde, die vorzugsweise auf den Verlauf der Biegemomentenlinie einen Bezug nimmt. Im Weiteren sollen die folgenden Beispiele sich auf Träger beziehen, die entweder als Kragbalken an einer Seite fest eingespannt sind oder in einer Gabellagerung eingebettet sind. Die Gabellagerungen umfassen dann die hohen Seiten des brettförmigen Trägers, also in unserem Fall parallel entlang der z-Achse.

Allgemeine Differentialgleichung hinsichtlich des Kippens eines brettförmigen Trägers:

a) Für den Verdrehwinkel ψ gilt die Abhängigkeit aus der Biegung um die Achse z---z.

$$E^* \cdot I_z \cdot y''(x) = F \cdot \psi(x) \cdot x$$

$$\Rightarrow y''(x) = \frac{F \cdot x \cdot \psi(x)}{E^* \cdot I_z}$$

Da wir sofort mit dem korrigierten Term des E-Modul für die plattentheoretische Betrachtung rechnen wollen, gilt nun der genauere Ausdruck:

$$E^* = \frac{E}{1-\nu^2}$$

$$\Rightarrow y''(x) = \frac{F \cdot x \cdot \psi(x)}{E \cdot I_z} \cdot (1-\nu^2)$$

b) Aus dem Torsionsmoment infolge des Kippvorgangs ergibt sich ebenfalls eine Abhängigkeit zum Verdrehwinkel ψ , jedoch bezogen auf die zweite Ableitung nach der Längsrichtung x.

$$M_t(x) = -G \cdot I_t \cdot \frac{d\psi}{dx} \quad | \cdot \frac{d}{dx}$$

$$\Rightarrow F \cdot x \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = F \cdot x \cdot y''(x) = -G \cdot I_t \cdot \psi''(x) \quad \Rightarrow \quad y''(x) = \frac{-G \cdot I_t \cdot \psi''(x)}{F \cdot x}$$

Durch das Gleichsetzen der rechten Gleichungsseite von $y''(x)$ ergibt sich:

$$\frac{F \cdot x \cdot \psi(x)}{E \cdot I_z} \cdot (1-\nu^2) = \frac{-G \cdot I_t \cdot \psi''(x)}{F \cdot x}$$

$$\Rightarrow \psi''(x) + (F \cdot x)^2 \cdot \frac{(1-\nu^2)}{E \cdot I_z \cdot G \cdot I_t} \cdot \psi(x) = 0$$

$$\Rightarrow \psi''(x) + (F \cdot x)^2 \cdot \omega^2 \cdot \psi(x) = 0 \quad \text{mit} \quad \omega^2 = \frac{(1-\nu^2)}{E \cdot I_z \cdot G \cdot I_t}$$

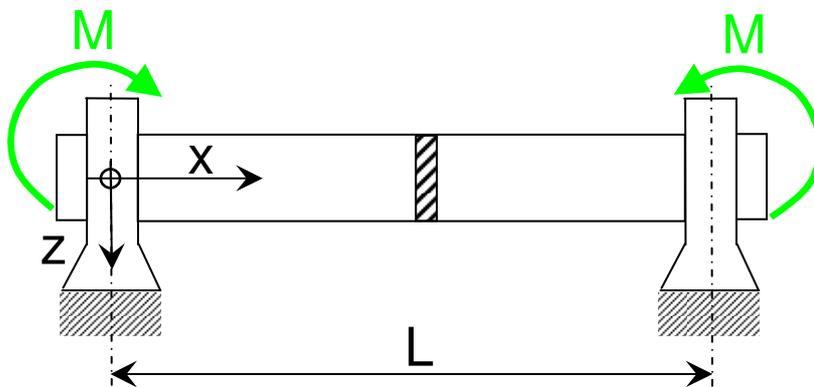
Der Ausdruck $F \cdot x$ ist dabei als Biegemoment an der Stelle x aufzufassen, so dass hier nun die Beziehung zum Biegemoment $M_{b_{y(x)}}$ einfließen kann.

$$M_{b_{y(x)}} = -F \cdot x$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\psi''(x) + M_{b_{y(x)}}^2 \cdot \omega^2 \cdot \psi(x) = 0}}$$

Das ist die allgemeine Differentialgleichung für das Kippen von brettförmigen Trägern, sofern die Bedingung $M_{b_{y(x=L)}} = 0$ vorausgesetzt ist.

3.2.1 Beispiel: Träger in Gabellagerung mit Randlastmomenten an den Enden



Für diesen Fall haben wir entlang der x -Achse ein konstantes Schnittlastmoment $M_{b_{y(x)}} = M$. Die Differentialgleichung besitzt damit die Form:

$$\psi''(x) + M^2 \cdot \omega^2 \cdot \psi(x) = 0 \quad \text{mit} \quad \omega^2 = \frac{(1-\nu^2)}{E \cdot I_z \cdot G \cdot I_t}$$

Als Lösungsansatz bietet sich daher die Kombination aus der Sinus- und Kosinusfunktion an.

$$\psi(x) = A \cdot \cos(M \cdot \omega \cdot x) + B \cdot \sin(M \cdot \omega \cdot x)$$

$$\psi'(x) = -A \cdot M \cdot \omega \cdot \sin(M \cdot \omega \cdot x) + B \cdot M \cdot \omega \cdot \cos(M \cdot \omega \cdot x)$$

$$\psi''(x) = -A \cdot (M \cdot \omega)^2 \cdot \cos(M \cdot \omega \cdot x) - B \cdot (M \cdot \omega)^2 \cdot \sin(M \cdot \omega \cdot x) = -(M \cdot \omega)^2 \cdot \psi(x)$$

Damit ist der Differentialgleichung genüge getan, weil ...

$$\psi''(x) + M^2 \cdot \omega^2 \cdot \psi(x) = 0 = -(M \cdot \omega)^2 \cdot \psi(x) + (M \cdot \omega)^2 \cdot \psi(x)$$

Die Koeffizienten A und B ergeben sich nun aus den beiden Randbedingungen:

$$\psi(x=0) = 0 \quad \text{und} \quad \psi(x=L) = 0 \quad ,$$

weil in den Lagerstellen der Gabel keine Verdrehung zugelassen wird.

$$\Rightarrow \psi(x=0) = 0 = A \cdot \cos(0) + B \cdot \sin(0) = A \quad \Rightarrow \quad A = 0$$

$$\Rightarrow \psi(x=L) = 0 = B \cdot \sin(M \cdot \omega \cdot L) \quad \Rightarrow \quad M \cdot \omega \cdot L = \pm n \cdot \pi \quad \text{mit } n = 1, 2, 3, \dots$$

Das kritische Lastmoment M_{kr} liegt hiermit dann vor, wenn der betragsmäßig niedrigste Eigenwertwert $n = 1$ eingesetzt wird.

$$\Rightarrow \underline{\underline{M_{kr} = \frac{\pi}{\omega \cdot L} = \frac{\pi}{L} \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I_z \cdot G \cdot I_t}{1 - \nu^2}}}}$$

3.3 Der Rayleigh-Quotient als erste Näherung für den Eigenwert λ :

Sobald die Biegemomentenfunktion $M_{b_{y(x)}}$ etwas komplizierter wird, dann wird auch die Lösbarkeit der Differentialgleichung schwieriger und ist mit mehr Aufwand verbunden. Deshalb kann man sich hinsichtlich des ersten Eigenwertes (niedrigste Wert einer kritischen Last) einer Näherungsmethode bedienen, die als Rayleigh-Quotient bezeichnet wird. Dieser Quotient ist eine aus der Variationsrechnung abgeleitete Methode, auf deren Herleitung hier nicht weiter eingegangen wird. Es wird lediglich darauf hingewiesen, dass für ein bestimmtes Variationsproblem eine „Eulersche Differentialgleichung“ gilt, die sich schließlich auf die Differentialgleichung für das Kippen von brettförmigen Trägern bringen lässt. Da dieses möglich ist, kann somit auch die Methode des Rayleigh-Quotienten zur Anwendung kommen.

Variationsproblem:

Es sei eine Funktion $F(x, y, y', y'')$ gegeben, welche über einen bestimmten Bereich nach dx integriert ein Extremum liefern soll. Diesen Integralausdruck bezeichnet man auch als Funktional I.

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y', y'') \cdot dx = \text{Extremum}$$

Eine notwendige Bedingung, die das Variationsproblem löst, gibt die folgende „Eulersche Differentialgleichung“ an.

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial y''} \right) = 0$$

Setzt man in diese Differentialgleichung folgende Funktion ein ...

$$F(x, y, y') = y'^2 - \lambda^2 \cdot g(x) \cdot y^2 \quad \text{ein, dann resultiert der Ausdruck:}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial y''} \right) = 0 = -\lambda^2 \cdot g(x) \cdot 2y - \frac{d}{dx} (2y') + 0 = -2 \cdot [\lambda^2 \cdot g(x) \cdot y + y']$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{y'' + \lambda^2 \cdot g(x) \cdot y = 0}}$$

Und hier finden wir die Differentialgleichung für das Kippproblem wieder, nur dass hier die Funktion y durch ψ ersetzt werden müsste und $g(x)$ die quadrierte Form für das Biegemoment darstellt. Das wäre somit gleichbedeutend mit:

$$\psi''(x) + M_{by(x)}^2 \cdot \lambda^2 \cdot \psi(x) = 0$$

An dieser Stelle ersetzen wir den Ausdruck ω^2 durch λ^2 , um eine Abgrenzung aufzuzeigen, dass es sich bei dem λ -Wert um eine Annäherung handeln wird, die von der Qualität der Ansatzfunktion abhängt. Ist die gewählte Ansatzfunktion zugleich eine Lösung der Differentialgleichung, dann läuft der Wert für $\lambda \rightarrow \omega$.

Das oben angesprochene Funktional I hat damit die Form:

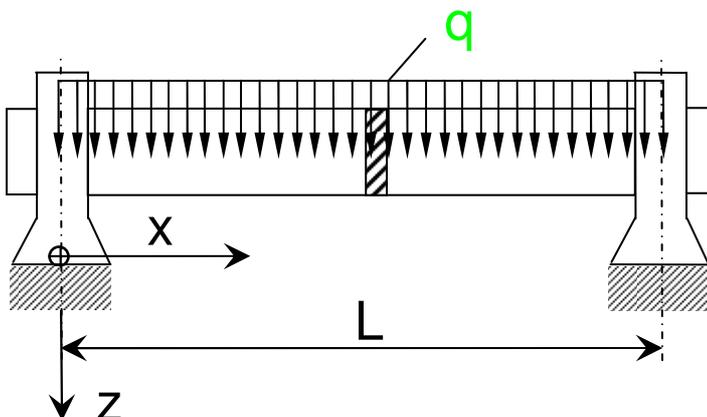
$$I = \int_{x1}^{x2} F(x, \psi, \psi') \cdot dx = \int_{x1=0}^{x2=L} [\psi'^2 - \lambda^2 \cdot M_{by}(x)^2 \cdot \psi^2] \cdot dx = \text{Extremum}$$

Für den ersten Eigenwert gilt dann näherungsweise die folgende Beziehung, aus welcher dann der Rayleigh-Quotient folgt:

$$\int_0^L [\psi'^2 - \lambda^2 \cdot M_{by}(x)^2 \cdot \psi^2] \cdot dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_0^L [\psi'^2] \cdot dx - \lambda^2 \int_0^L [M_{by}(x)^2 \cdot \psi^2] \cdot dx = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda^2 = \frac{\int_0^L [\psi'^2] \cdot dx}{\int_0^L [M_{by}(x)^2 \cdot \psi^2] \cdot dx}$$

3.3.1 Beispiel: Träger in Gabellagerung mit kontinuierlicher Streckenlast q



Die Biegemomentenfunktion lautet für diesen Fall:

$$M_{by(x)} = \frac{q \cdot L}{2} \cdot \left(x - \frac{x^2}{L} \right)$$

$$\Rightarrow \psi''(x) + M_{by(x)}^2 \cdot \lambda^2 \cdot \psi(x) = 0 \quad \text{mit} \quad \lambda^2 = \frac{(1-\nu^2)}{E \cdot I_z \cdot G \cdot I_t}$$

Wahl einer geeigneten Ansatzfunktion für $\psi(x)$:

$$\psi(x) = k \cdot \left(x - \frac{x^2}{L} \right) \quad \psi^2(x) = k^2 \cdot \left(x - \frac{x^2}{L} \right)^2$$

$$\psi'(x) = k \cdot \left(1 - \frac{2x}{L} \right) \quad \psi'^2(x) = k^2 \cdot \left(1 - \frac{2x}{L} \right)^2$$

$$\Rightarrow \lambda_1^2 = \frac{\int_0^L [\psi'^2] \cdot dx}{\int_0^L [M_{by(x)}^2 \cdot \psi^2] \cdot dx} = \frac{\int_0^L \left[k^2 \cdot \left(1 - \frac{2x}{L} \right)^2 \right] \cdot dx}{\int_0^L \left[\frac{q^2 \cdot L^2}{4} \cdot \left(x - \frac{x^2}{L} \right)^2 \cdot k^2 \cdot \left(x - \frac{x^2}{L} \right)^2 \right] \cdot dx}$$

$$\Rightarrow \lambda_1^2 = \frac{4}{q^2 \cdot L^2} \cdot \frac{\int_0^L \left[\left(1 - \frac{2x}{L} \right)^2 \right] \cdot dx}{\int_0^L \left[\left(x - \frac{x^2}{L} \right)^4 \right] \cdot dx} = \frac{4}{q^2 \cdot L^6} \cdot \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{630}} = \frac{4}{q^2 \cdot L^6} \cdot 210$$

Mit dem errechneten ersten Eigenwert λ_1^2 kann nun auch auf die kritische Last q geschlossen werden. Für λ_1^2 setzen wir unseren definierten Ausdruck λ^2 aus der obigen Differentialgleichung ein.

$$\lambda^2 = \frac{4}{q^2 \cdot L^6} \cdot 210$$

$$\Rightarrow q_{kr}^2 = \frac{840}{L^6} \cdot \frac{1}{\lambda^2} = \frac{840}{L^6} \cdot \frac{E \cdot I_z \cdot G \cdot I_t}{(1-\nu^2)}$$

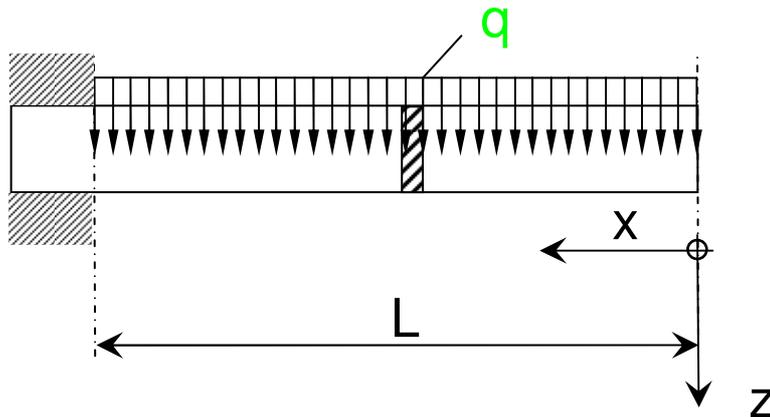
$$\Rightarrow q_{kr} = \frac{29,0}{L^3} \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I_z \cdot G \cdot I_t}{(1-\nu^2)}} \quad \text{als Annäherung!}$$

Der genaue Wert (laut Literaturangabe) ist:

$$\underline{\underline{q_{kr} = \frac{28,32}{L^3} \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I_z \cdot G \cdot I_t}{(1-\nu^2)}}}}$$

3.3.2 Beispiel: Fest eingespannter Träger mit kontinuierlicher Streckenlast q

Im folgenden Beispiel soll die gewählte Ansatzfunktion allgemein als eine Potenzfunktion von x^n geschrieben werden. Und zwar soll ein Exponent gefunden werden, bei welchem der Eigenwert ein Minimum erreicht. Denn eine Eigenschaft des Rayleigh-Quotienten besteht darin, dass eine angenäherte Lösung zu höheren Eigenwerten führt bzw. die genaue Lösung zu einem Minimum des Eigenwertes beiträgt.



Die Biegemomentenfunktion lautet für diesen Fall:

$$M_{by(x)} = -\frac{q}{2} \cdot x^2$$

$$\Rightarrow \psi''(x) + M_{by(x)}^2 \cdot \lambda^2 \cdot \psi(x) = 0 \quad \text{mit} \quad \lambda^2 = \frac{(1-\nu^2)}{E \cdot I_z \cdot G \cdot I_t}$$

Wahl einer geeigneten Ansatzfunktion für $\psi(x)$:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= k \cdot (L - x^n) & \psi^2(x) &= k^2 \cdot [L^{2n} - 2L^n \cdot x^n + x^{2n}] \\ \psi'(x) &= -k \cdot n \cdot x^{n-1} & \psi'^2(x) &= k^2 \cdot n^2 \cdot x^{2n-2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lambda_1^2 = \frac{\int_0^L [\psi'^2] \cdot dx}{\int_0^L [M_{by(x)}^2 \cdot \psi^2] \cdot dx} = \frac{\int_0^L [k^2 \cdot n^2 \cdot x^{2n-2}] \cdot dx}{\int_0^L \left[\frac{q^2 \cdot x^4}{4} \cdot k^2 \cdot [L^{2n} - 2L^n \cdot x^n + x^{2n}] \right] \cdot dx}$$

$$\Rightarrow \lambda_1^2 = \frac{4}{q^2} \cdot \frac{\left[\frac{n^2 \cdot x^{2n-1}}{(2n-1)} \right]_0^L}{\left[\frac{L^{2n}}{5} \cdot x^5 - \frac{2L^n}{n+5} \cdot x^{n+5} + \frac{x^{2n+5}}{2n+5} \right]_0^L} = \frac{4}{q^2 \cdot L^2} \cdot \frac{L^{2n-1}}{L^{2n+5}} \cdot \frac{\frac{n^2}{(2n-1)}}{\frac{2n^2}{10n^2 + 75n + 125}}$$

$$\Rightarrow \lambda_1^2 = \frac{2}{q^2 \cdot L^6} \cdot \frac{10n^2 + 75n + 125}{(2n-1)} = \text{Minimum!}$$

Mit der Forderung nach dem Minimum muss der quadratische Ausdruck für λ_1 nach n abgeleitet werden.

$$\begin{aligned} \frac{d(\lambda_1^2)}{dn} &= \frac{2}{q^2 \cdot L^6} \cdot \frac{d}{dn} \left(\frac{10n^2 + 75n + 125}{(2n-1)} \right) = \frac{2}{q^2 \cdot L^6} \cdot \frac{(20n+75) \cdot (2n-1) - (10n^2 + 75n + 125) \cdot 2}{(2n-1)^2} \\ &= \frac{20 \cdot \left(n^2 - n - \frac{65}{4} \right)}{(2n-1)^2} = 0 \end{aligned}$$

Da wir davon ausgehen, dass die Potenzen größer als 1 angesetzt werden (zumindest parabolischer Verlauf), genügt es somit, die positiven Nullstellen bzgl. des Zählers zu finden.

$$\begin{aligned} \Rightarrow 20 \cdot \left(n^2 - n - \frac{65}{4} \right) &= 0 \quad \Rightarrow \quad \left(n^2 - n - \frac{65}{4} \right) = 0 \\ \Rightarrow n_{1,2} &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{33}{2}} \Rightarrow n_1 = 4,56 \quad ; (n_2 = -3,562) \end{aligned}$$

Setzt man den Wert $n_1 = 4,56$ in die Gleichung λ_1 ein, dann ergibt das:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lambda_1^2 &= \frac{2}{q^2 \cdot L^6} \cdot \frac{10n^2 + 75n + 125}{(2n-1)} = \frac{1}{q^2 \cdot L^6} \cdot 166,24 \\ \Rightarrow \lambda_1 &= \frac{1}{q \cdot L^3} \cdot 12,89 \end{aligned}$$

Und somit kann wiederum auf die kritische Last q_{kr} geschlossen werden mit:

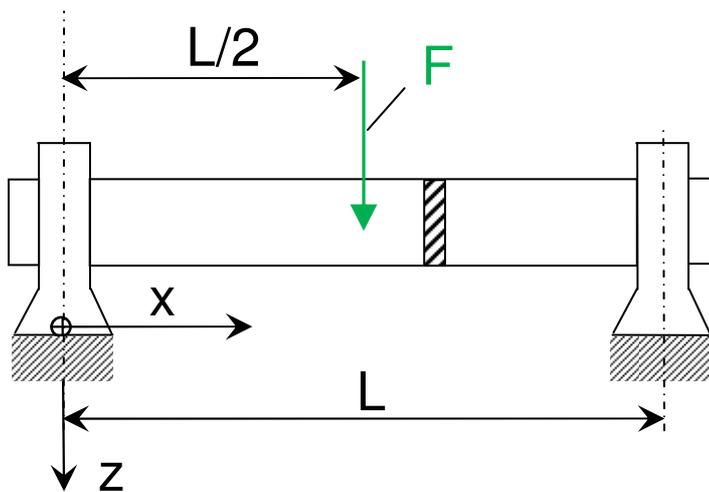
$$q_{kr} = \frac{12,89}{L^3} \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I_z \cdot G \cdot I_t}{(1-\nu^2)}}$$

Der genaue Wert (laut Literaturangabe) ist:

$$\underline{\underline{q_{kr} = \frac{12,85}{L^3} \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I_z \cdot G \cdot I_t}{(1-\nu^2)}}}}$$

An diesem angenäherten Ergebnis (Ansatzfunktion) sieht man, dass der Eigenwert schon recht nahe an der korrekten Lösung ist (rel. Fehler ca. 0,0034). D.h., mit einer Ansatzfunktion $\psi(x)$ mit dem Exponent $n=4$ für x (\rightarrow Faktor: 12,93) oder $n=5$ für x (\rightarrow Faktor: 12,91) lassen sich zu diesem Fall schon sehr gute Näherungen ableiten.

3.3.3 Beispiel: Träger in Gabellagerung mit mittiger Kraft F



Die Biegemomentenfunktion lautet für diesen Fall:

$$M_{by(x)} = \frac{F}{2} \cdot x \quad \text{im Bereich: } 0 \leq x \leq \frac{L}{2}$$

$$M_{by(x)} = \frac{F}{2} \cdot (L - x) \quad \text{im Bereich: } \frac{L}{2} \leq x \leq L$$

$$\Rightarrow \psi''(x) + M_{by(x)}^2 \cdot \lambda^2 \cdot \psi(x) = 0 \quad \text{mit} \quad \lambda^2 = \frac{(1 - \nu^2)}{E \cdot I_z \cdot G \cdot I_t}$$

Die Momentenfunktion ist symmetrisch bzgl. der Stelle $x = L/2$ und stellt eine Dreiecksfunktion dar.

Wahl einer geeigneten Ansatzfunktion für $\psi(x)$:

$$\psi(x) = k \cdot \left(x - \frac{x^2}{L} \right) \quad \psi^2(x) = k^2 \cdot \left(x - \frac{x^2}{L} \right)^2$$

$$\psi'(x) = k \cdot \left(1 - \frac{2x}{L} \right) \quad \psi'^2(x) = k^2 \cdot \left(1 - \frac{2x}{L} \right)^2$$

Das Quadrat der ψ -Funktion ist ebenfalls eine symmetrische Funktion bzgl. der Stelle $x = L/2$, so dass die Multiplikation mit dem Quadrat der Momentenfunktion wiederum eine symmetrische Funktion ergibt. Die Integration des Ausdrucks $M_{by(x)}^2 \cdot \lambda^2 \cdot \psi(x)$ muss daher nur in den Grenzen von $x = 0$ bis $x = L/2$ geschehen, wobei das Integral dann mit dem Faktor 2 zu versehen ist.

$$\int_0^L [M_{by(x)}^2 \cdot \psi^2] \cdot dx = 2 \cdot \int_0^{\frac{L}{2}} [M_{by(x)}^2 \cdot \psi^2] \cdot dx$$

$$\begin{aligned}
2 \cdot \int_0^{\frac{L}{2}} [M_{by}(x)^2 \cdot \psi^2] \cdot dx &= 2 \cdot \int_0^{\frac{L}{2}} \left[\frac{F^2}{4} \cdot x^2 \cdot k^2 \cdot \left(x - \frac{x^2}{L} \right)^2 \right] \cdot dx \\
\Rightarrow \frac{F^2}{2} \cdot k^2 \cdot \int_0^{\frac{L}{2}} \left[x^4 - \frac{2x^5}{L} + \frac{x^6}{L^2} \right] \cdot dx &= \frac{F^2}{2} \cdot k^2 \cdot \left[\frac{x^5}{5} - \frac{2x^6}{6 \cdot L} + \frac{x^7}{7 \cdot L^2} \right]_0^{L/2} \\
\Rightarrow \frac{F^2}{2} \cdot k^2 \cdot L^5 \cdot \left[\frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^5 - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^6 + \frac{1}{7} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^7 \right] &= \frac{F^2}{2} \cdot k^2 \cdot L^5 \cdot \left[\frac{1}{160} - \frac{1}{192} + \frac{1}{896} \right] = \frac{F^2}{2} \cdot k^2 \cdot L^5 \cdot \frac{29}{13440}
\end{aligned}$$

Mit dem folgenden Integralausdruck wurde schon in Kapitel 3.3.1 gerechnet, weil dort dieselbe Ansatzfunktion für ψ zur Anwendung kam.

$$\int_0^L [\psi'^2] \cdot dx = \int_0^L \left[k^2 \cdot \left(1 - \frac{2x}{L} \right)^2 \right] \cdot dx = k^2 \cdot L \cdot \frac{1}{3}$$

Somit folgt für die Berechnung des Eigenwertes λ^2 :

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \lambda_1^2 &= \frac{\int_0^L [\psi'^2] \cdot dx}{2 \int_0^{L/2} [M_{by}(x)^2 \cdot \psi^2] \cdot dx} = \frac{k^2 \cdot L \cdot \frac{1}{3}}{\frac{F^2 \cdot k^2 \cdot L^5}{2} \cdot \frac{29}{13440}} = \frac{26880}{87} \cdot \frac{1}{L^4} \cdot \frac{1}{F^2} \\
\Rightarrow \lambda_1 &\approx \frac{\sqrt{309}}{L^2} \cdot \frac{1}{F} \quad \text{mit} \quad \lambda = \sqrt{\frac{(1-\nu^2)}{E \cdot I_z \cdot G \cdot I_t}} \\
\Rightarrow F_{kr} &= \frac{\sqrt{309}}{L^2} \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I_z \cdot G \cdot I_t}{(1-\nu^2)}} = \frac{17,58}{L^2} \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I_z \cdot G \cdot I_t}{(1-\nu^2)}}
\end{aligned}$$

Der genaue Wert (laut Literaturangabe) ist:

$$\underline{\underline{F_{kr} = \frac{16,94}{L^2} \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I_z \cdot G \cdot I_t}{(1-\nu^2)}}}}$$

D.h., auch mit diesem Ansatz kommt man in gewisser Weise dem korrekten Ergebnis sehr nahe (rel. Fehler ca. 0,038).

4. Knickung bei Kreisringen/Rohren sowie Beulung bei Platten und Schalen

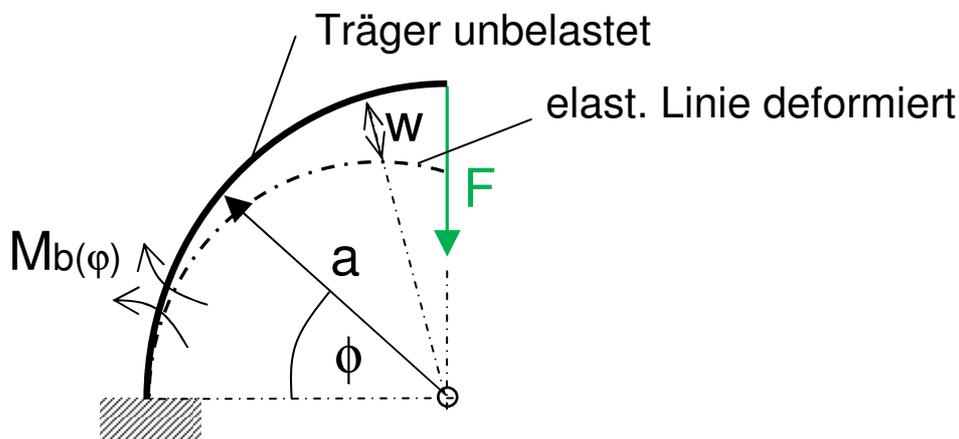
4.1 Einleitung zu den speziell ausgewählten Problemfällen:

Mit diesem Kapitel (4) sollen weitere besondere Beispiele angeführt werden, deren Druckbeanspruchung zu einer Ausknickung oder Ausbeulung führen. Mit der Behandlung dieser noch analytisch berechenbaren Fälle, wobei der zunehmenden Komplexität geschuldet auch eine Model-Idealisierung und Vereinfachung bei der theoretischen Herleitung die Regel ist, wird im Folgenden das Augenmerk nur auf die speziellen Lösungen gerichtet. Zur Information seien lediglich die herangezogenen Differentialgleichungen dokumentiert, sowie der gewählte Lösungsansatz, der bei den Beispielen zum Ziel führen würde.

Detaillierte Herleitungen und Lösungsstrategien sind daher beispielsweise dem Werk von István Szabó zu entnehmen ([1]: Höhere Technische Mechanik - §15 Instabilitätsprobleme). Dieses Buch ist eine wahre Fundgrube für die Probleme der höheren Elastizitätstheorie und sollte als Standardwerk, im Rahmen der Technischen Mechanik, zum Nachschlagerepertoire gehören.

4.2 Das Ausknicken eines kreisförmigen Ringes:

Zu Beginn soll erst einmal ein Fall betrachtet werden, der jetzt noch nichts mit dem Ausknicken zu tun hat, sondern eine elastische Verformung durch eine Biegebeanspruchung erhält. Der Fall hat große Ähnlichkeit mit dem fest eingespannten Biegeträger, jedoch mit dem Unterschied, dass der Träger im nicht deformierten Zustand schon eine Kreisform besitzt. D.h., die elastische Linie des Trägers hat schon im unbelasteten Zustand einen konstanten Krümmungsradius. Das führt zwangsläufig zu einer anderen Ausgangsform für die Differentialgleichung, welche den Biegeträger zu beschreiben hat.



Als Problemfall denken wir uns einen Viertelkreis eines Biegeträgers, der an dem einen Ende fest eingespannt ist und am anderen Ende mit einer Kraft beansprucht wird, die in Richtung des Kreismittelpunktes zeigt. Der konstante Radius des unbelasteten Trägers beträgt $R = a$.

Das Biegemoment wird beschrieben durch:

$$M_{b(\varphi)} = -F \cdot a \cdot \cos \varphi$$

Die für den Viertelkreisträger geltende Differentialgleichung hat dann die Form:

$$w''(\varphi) + w(\varphi) = \frac{M_{b(\varphi)}}{E \cdot I} \cdot a^2 = \frac{-F \cdot \cos \varphi}{E \cdot I} \cdot a^3$$

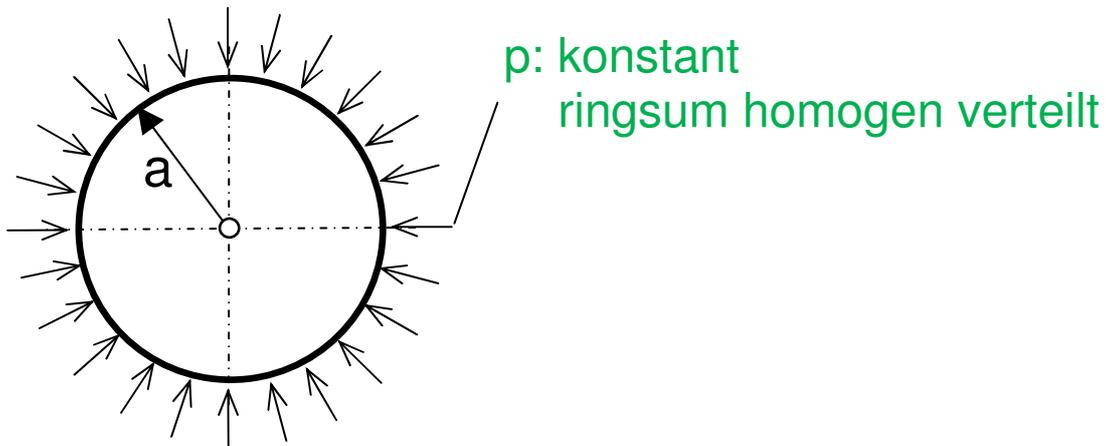
Gewählter Lösungsansatz sei:

$$w(\varphi) = \frac{F \cdot \varphi \cdot \sin \varphi}{2 \cdot E \cdot I} \cdot a^3$$

Die maximale Verschiebung w am Kraftansatzpunkt ($\varphi = \pi/2$) ist dann:

$$w(\varphi = \pi/2) = \frac{F \cdot \pi/2 \cdot \sin \pi/2}{2 \cdot E \cdot I} \cdot a^3 = \frac{F \cdot \pi}{4 \cdot E \cdot I} \cdot a^3$$

Aufbauend hinsichtlich der hier schon angekündigten Differentialgleichung für einen schon anfangs gekrümmten Biegeträger, kann nun in ähnlicher Weise auch die Differentialgleichung für einen Kreisring abgeleitet werden, der ringsum von außen durch einen konstanten Druck p belastet wird.



Die Differentialgleichung für das Knickproblem beim Kreisring lautet:

$$w''(\varphi) + \left(1 + \frac{a^3 \cdot p}{E \cdot I}\right) w(\varphi) = \frac{M_{b(w)}}{E \cdot I} \cdot a^2$$

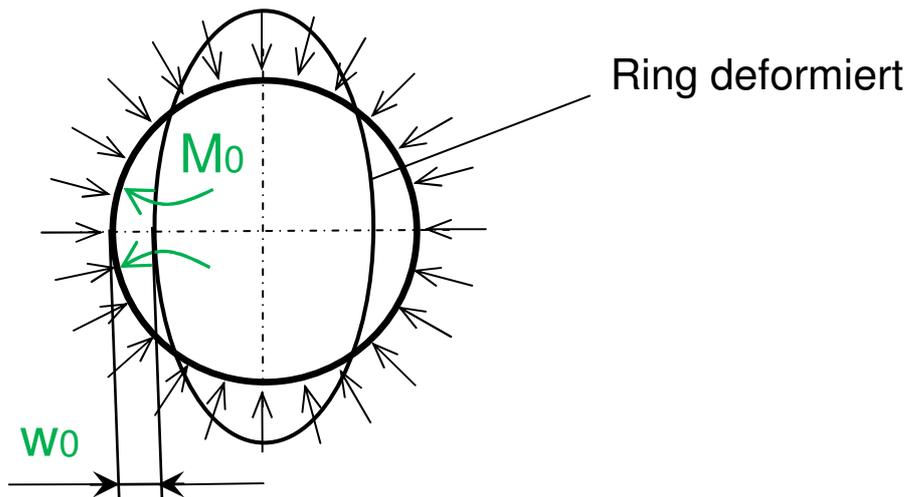
$$w''(\varphi) + \lambda^2 \cdot w(\varphi) = \frac{M_{b(w)}}{E \cdot I} \cdot a^2 \quad \text{mit} \quad \lambda^2 = \left(1 + \frac{a^3 \cdot p}{E \cdot I}\right)$$

Man beachte dabei, dass die Biegemomentenfunktion auf der rechten Gleichungsseite eine Abhängigkeit von der Verschiebung w hat, und nicht wie zuvor von φ !

Das Biegemoment errechnet sich hier aus den folgenden Anteilen:

$$M_{b(w)} = \frac{a^3 \cdot p}{E \cdot I} \cdot w_0 + \frac{a^2}{E \cdot I} \cdot M_0$$

Dabei bedeuten w_0 und M_0 die Verschiebung und das Schnittlastmoment aufgrund der vorliegenden Druckbelastung p , so wie es in der folgenden Skizze dargestellt ist.



Die allgemeine Lösung zu diesem Problem kann durch folgenden Ansatz angegeben werden:

$$w(\varphi) = C_1 \cdot \cos(\lambda\varphi) + C_2 \cdot \sin(\lambda\varphi) + \frac{p \cdot a^3 \cdot w_0 + a^2 \cdot M_0}{E \cdot I + a^3 \cdot p}$$

Randbedingungen sind dann, dass die Extremalwerte für w in der Winkellage $\varphi = 0$ und $\varphi = 90^\circ$ bzw. $\varphi = \pi/2$ vorzufinden sind, also die erste Ableitung $dw/d\varphi$ dort verschwinden muss. Daraus folgt dann, dass $C_2 = 0$ sein muss und damit diese Eigenwertgleichung resultiert:

$$C_1 \cdot \cos\left(\lambda \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \text{mit} \quad \lambda_n = 2 \cdot n \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Der niedrigste Eigenwert wird daher bei $n = 1$ vorliegen und ergibt abschließend die Lösung des Knickproblems:

$$\lambda_1^2 = 4 = \left(1 + \frac{a^3 \cdot p}{E \cdot I}\right) \Rightarrow \underline{\underline{p_{kr} = \frac{3 \cdot E \cdot I}{a^3}}}$$

4.2.1 Das Ausknicken eines kreisförmigen Ringes mit Kreisquerschnitt:

Handelt es sich bei dem Kreisringquerschnitt ebenfalls um einen Kreis mit einem Durchmesser d (= Torus-Form), dann ist die kritische Druckbelastung:

$$I = \frac{\pi \cdot d^4}{64} \Rightarrow \underline{\underline{p_{kr} = \frac{3}{64} \cdot \frac{E \cdot \pi \cdot d^4}{a^3}}}$$

4.2.2 Das Ausbeulen einer Kreiszyllinderschale unter Außendruck:

Stellen wir uns eine Kreiszyllinderschale vor, die eine Zylinderhöhe H und eine Wanddicke t bei vorhandenem Radius $R = a$ besitzt und zudem folgende Bedingungen erfüllt:

$$H > R = a$$

$$R = a \gg t$$

In einem solchen Fall droht der Zylinder bei einer äußeren Druckbelastung auszubeuken. Unter Berücksichtigung der behinderten Querkontraktion (Korrektur vom E-Modul) kann dann die folgende Näherung einer kritischen Last angeführt werden mit:

$$\underline{\underline{p_{kr} = \frac{1}{4} \cdot \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \left(\frac{t}{a}\right)^3}}$$

4.3 Die Beulung von Platten und Schalen :

Wird eine Platte oder Schale (Platten/Schalendicke ist verschwindend klein gegenüber der Plattenausdehnung) in ihrer Ausdehnungsebene, also am Rand belastet, dann kann sich eine Instabilität in Form einer Beulung oder Ausknickung einstellen. Als Randlasten (an den Außenkanten) können sowohl Drucklasten (tangential in der x,y -Ebene) als auch Schublasten dazu führen, dass es zu dieser Beulung kommt.

Für die folgenden Beispiele bzgl. der ebenen Platten setzen wir voraus, dass deren Ausdehnung in der x,y -Ebene vorliegt und in z -Richtung die Plattendicke t definiert ist. Aus der Kirchhoffschen Plattentheorie resultiert die hergeleitete Differentialgleichung hinsichtlich einer senkrecht auf der Plattenebene stehenden Druckbelastung $p(x,y)$:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \cdot \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \Delta \Delta w(x, y) = \frac{p(x, y)}{N} \quad \text{mit} \quad N = \frac{E \cdot t^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)}$$

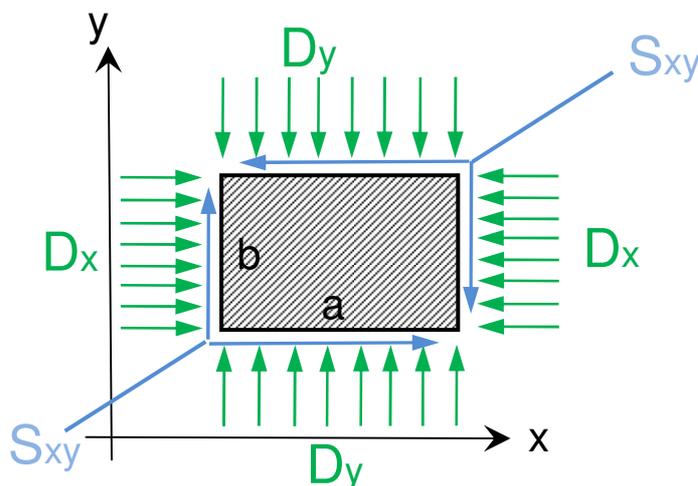
Hierbei sei N die sogenannte Plattensteifigkeit, die neben dem E-Modul von der Plattendicke t und der Querkontraktionsziffer ν abhängt.

Wie man sofort erkennt, wäre hinsichtlich der Beulungsproblematik die rechte Seite der Gleichung nicht relevant, weil keine Hauptbelastung senkrecht zur Plattenausdehnung (x,y -Ebene) existiert, sondern nur in tangentialer Richtung an den Rändern. Insofern müsste die Differentialgleichung auf diese tangentialen Belastungsterme bezogen und umgestellt werden. Mit Einführung der Belastungsgrößen D_x , D_y und S_{xy} würde die Differentialgleichung nun folgende Schreibweise erhalten.

Differentialgleichung bzgl. der Beulung von ebenen Platten:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \cdot \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \Delta \Delta w(x, y) = - \left[D_x \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 S_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial y} + D_y \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \cdot \frac{1}{N}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{N \cdot \Delta \Delta w(x, y) + D_x \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 S_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial y} + D_y \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0}}$$



Randlasten der Platte:

Drucklasten: D_x, D_y
Schublasten: S_{xy}

Belastungen je Längeneinheit !

Plattenausdehnung: $a \times b$

4.3.1 Betrachtungen an der Rechteckplatte:

Fallunterscheidungen bei der Rechteckplatte:

- | | |
|---|-----------------------------|
| a) Die freigelagerte Platte unter allseitig gleichem Druck: | $S_{xy} = 0, D_x = D_y = D$ |
| b) Die freigelagerte Platte mit einachsigem Druck: | $S_{xy} = 0, D_y = 0, D_x$ |
| c) Die freigelagerte Platte unter allseitigem Druck: | $S_{xy} = 0, D_x, D_y$ |

Der den Randbedingungen genügende Ansatz ist:

$$w(x, y) = C_{jk} \cdot \sin\left(\frac{j \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{k \cdot \pi \cdot y}{b}\right)$$

Die kritischen Lasten (niedrigster Eigenwert) für die obigen Fälle sind dann:

$$\text{a) } D_{kr} = \pi^2 \cdot N \cdot \left(\frac{j^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} \right) \quad j, k \text{ sind ganzzahlige Eigenwerte}$$

$$\Rightarrow D_{kr} = \pi^2 \cdot N \cdot \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) = \underline{\underline{\pi^2 \cdot \frac{E \cdot t^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)}}$$

$$\text{b) } D_{x_{kr}} = \frac{\pi^2 \cdot N}{b^2} \cdot \left(j \cdot \frac{b}{a} + \frac{k^2}{j} \cdot \frac{a}{b} \right)^2$$

Die Eigenwerte j und k sind in diesem Fall so zu wählen, dass die Beullast D_x ein Minimum erreicht. Dieses liegt vor, wenn $k = 1$ und $j = a/b$ ist. D.h. dann auch, dass das Verhältnis a/b als ganzzahlig aufzufassen ist!

Für die kurze Platte mit der Vorgabe $a \leq b$ resultiert dann ein Minimum, wenn $k = j = 1$ gesetzt sind.

$$\underline{\underline{D_{x_{kr}} = \frac{\pi^2 \cdot N}{b^2} \cdot \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right)^2}}$$

Für die lange Platte mit der Vorgabe $a > b$ und ganzzahligem Seitenverhältnis a/b gilt dann:

$$\underline{\underline{D_{x_{kr}} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot N}{b^2}}}$$

Für die lange Platten mit der Vorgabe $a > b$ und nicht ganzzahligem Seitenverhältnis a/b gilt dagegen mit $k = 1$.

$$\underline{\underline{D_{x_{kr}} = \frac{\pi^2 \cdot N}{b^2} \cdot \left(j \cdot \frac{b}{a} + \frac{1}{j} \cdot \frac{a}{b} \right)^2}}$$

Der ganzzahlige Wert von j ist so zu wählen, dass er möglichst nah an das Verhältnis a/b kommt und hinzukommend das Minimumkriterium für D_x erreicht. D.h., es stehen nur zwei benachbarte ganzzahlige Werte für j zur Verfügung, wobei der eine etwas kleiner und der andere etwas größer als das Verhältnis a/b ist.

$$c) \quad D_{x_{kr}} = \frac{\pi^2 \cdot N \cdot \left(\frac{j^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} \right)^2}{\frac{j^2}{a^2} + \frac{D_y}{D_x} \cdot \frac{k^2}{b^2}}$$

Die Eigenwerte j und k sind in diesem Fall so zu wählen, dass bei dem Verhältnis D_y/D_x die Beullast D_x ein Minimum erreicht.

Die freigelagerte Platte mit allseitigem Schub:

$$S_{xy}, \quad D_x = D_y = 0$$

Das über einen Näherungsansatz (Verfahren nach Ritz) abgeleitete Ergebnis lautet hierzu:

$$S_{xy_{kr}} = \frac{9 \cdot \pi^4}{32} \cdot N \cdot a \cdot b \cdot \left(\frac{j^2}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2$$

Als Näherungsansatz wurde dabei gewählt:

$$w(x, y) = C_1 \cdot \sin\left(\frac{j \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot y}{b}\right) + C_2 \cdot \sin\left(\frac{2j \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot y}{b}\right)$$

Den niedrigsten Wert der Schubbelastung erhält man mit $j = 1$ (bei nur einer Beule).

$$\Rightarrow \underline{\underline{Sxy_{kr} = \frac{9 \cdot \pi^4}{32} \cdot N \cdot a \cdot b \cdot \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2}}$$

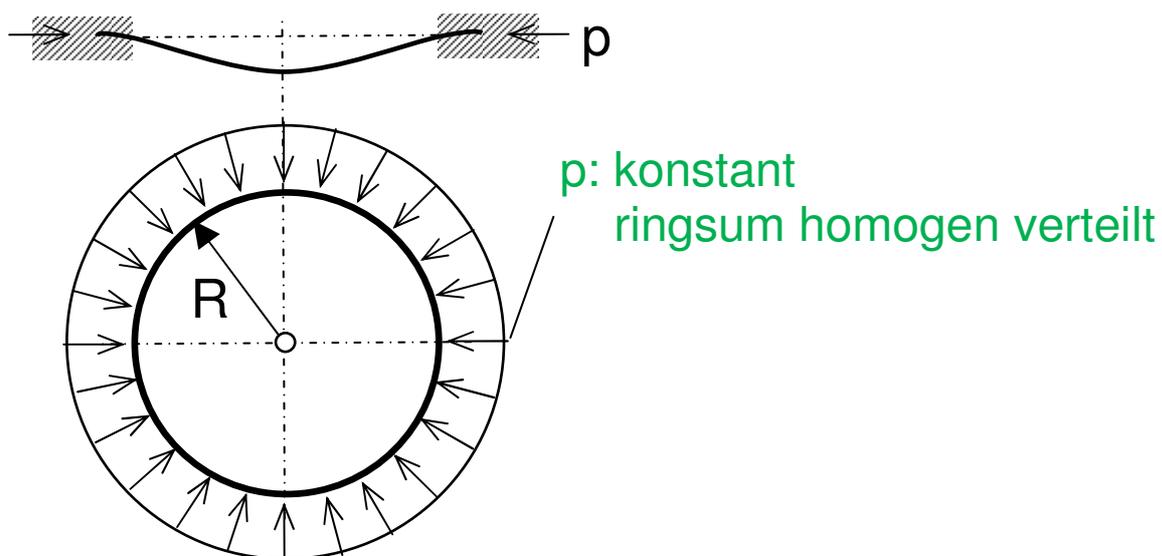
Sonderfall:

Bei einem unendlich langen Plattenstreifen $a \gg b$ gilt der Eigenwert von Southwell mit:

$$\Rightarrow \underline{\underline{Sxy_{kr} = 5,35 \cdot \frac{\pi^2 \cdot N}{b^2}}}$$

4.3.2 Betrachtungen an der Kreisplatte:

Eine Kreisplatte mit konstanter Dicke t und einem Radius R sei am Umfang fest eingespannt. Am äußeren Umfang wirkt ein konstanter Radialdruck p . Auch bei diesem Fall wird sich irgendwann eine Beulung einstellen. Vorausgesetzt wird hier, dass die feste Einspannung in radialer Richtung eine entsprechende Verschiebung zulässt.



Die kritische Drucklast wäre für diesen Fall:

$$\Rightarrow \underline{\underline{p_{kr} = 14,67 \cdot \frac{N}{R^2}}}$$

Handelt es sich jedoch um eine Kreisplatte, die ringsum gelenkig gelagert ist, dann liegt eine kritische Drucklast vor, die nur noch etwa einem Viertel von dem Wert entspricht, der für die fest eingespannte Platte angegeben wurde.

Die kritische Drucklast wäre für den Fall der gelenkig gelagerten Kreisplatte:

$$\Rightarrow \underline{\underline{p_{kr} = 3,40 \cdot \frac{N}{R^2}}}$$

4.3.3 Betrachtungen an Kreiszyinderschale mit axialer Druckbelastung:

Im Abschnitt 4.2.2 wurde ja schon einmal der Fall der Kreiszyinderschale behandelt, wobei hier eine Radialbelastung vorgelegen hatte, die zu einem Ausknicken des Zylinders geführt hätte.

Der jetzt noch fehlende Fall wäre, wenn die Druckbelastung achsparallel auf dem Kreisrand des Zylinders verteilt ist, also eine reine Axiallast $p = \text{konst.}$ vorliegt. Auch hier sind zwei Lagerungstypen zu unterscheiden.

- a) der beidseitig gelenkig gelagerte Zylinder
- b) der beidseitig fest eingespannte Zylinder

zu a)

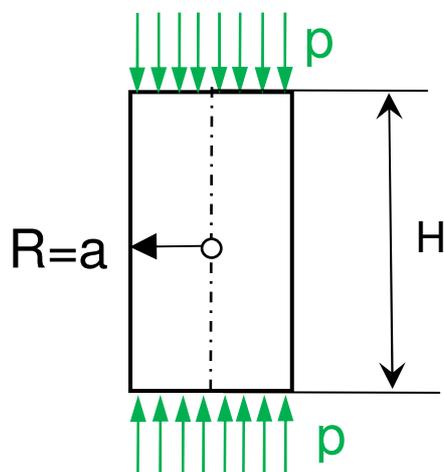
Erneut sollen die Angaben zum Zylinder gelten wie bei 4.2.2:

$$H > R = a$$

mit der Wanddicke t , der Zylinderhöhe H und dem Radius $R = a$

$$R = a \gg t$$

Sonderfall: Wenn die Höhe weitaus größer ist als der Radius, dann kommen wir in den Bereich der Eulerschen Knickfälle. D.h., die Zylinderschale beult dann nicht mehr aus, sie knickt in der Gestalt eines Druckstabes aus.



Wanddicke der Schale = t

Drucklast axial: p

Belastungen je Längeneinheit!
am Rand verteilt

Die maßgebliche Differentialgleichung für die Schalenbeulung ist gegeben durch:

$$w^{(4)}(x) + \frac{p}{N} w''(x) + \frac{12 \cdot (1-\nu^2)}{a^2 \cdot t^2} \cdot w(x) = 0$$

Der hierfür notwendige Ansatz wäre:

$$w(x) = A \cdot \sin\left(k \cdot \pi \cdot \frac{x}{H}\right) \quad \text{für } k = 1, 2, 3, \dots$$

Eingesetzt in die Differentialgleichung folgt damit die Auflösung bzgl. der Last p:

$$p = N \cdot \frac{\left(\frac{k \cdot \pi}{H}\right)^4 + \frac{12 \cdot (1-\nu^2)}{a^2 \cdot t^2}}{\left(\frac{k \cdot \pi}{H}\right)^2}$$

Ein Minimum bzgl. p_{kr} erhält man für $k = k_0$, wenn gilt:

$$\left(\frac{k_0 \cdot \pi}{H}\right) = \sqrt[4]{\frac{12 \cdot (1-\nu^2)}{a^2 \cdot t^2}} \Rightarrow k_0 = \frac{H}{\pi} \cdot \sqrt[4]{\frac{12 \cdot (1-\nu^2)}{a^2 \cdot t^2}}$$

Hierbei muss die Forderung nach einem möglichst ganzzahligem k_0 gelten! Hier ist also wieder die Wahl zu treffen, bei welchem ganzzahligen k_0 -Wert ein Minimum für p_{kr} erreicht wird, wenn gilt:

$$k_0' < k_0 < k_0' + 1 \Rightarrow \text{einsetzen von } k_0' \text{ oder } (k_0' + 1) \text{ anstatt } k_0$$

$$p_{kr} \geq p_0 = N \cdot \frac{\left(\frac{k_0 \cdot \pi}{H}\right)^4 + \frac{12 \cdot (1-\nu^2)}{a^2 \cdot t^2}}{\left(\frac{k_0 \cdot \pi}{H}\right)^2} = \frac{E \cdot t^2}{a \cdot \sqrt{3 \cdot (1-\nu^2)}}$$

Ist der errechnete Wert für k_0 zufällig ganzzahlig, dann wird $p_{kr} = p_0$. In diesem Fall ist die Beullast unabhängig von der Zylinder- bzw. Schalenhöhe H, wie es oben in der Gleichung für p_0 ersichtlich ist.

Als Fallunterscheidung zwischen Beulung und Knickung kann angegeben werden, dass ...

$$\frac{a^3}{t \cdot H^2} < \frac{2}{\pi^2 \sqrt{3 \cdot (1-\nu^2)}} \quad \text{für das Kriterium eines Knickstabes gilt und ...}$$

$$\frac{a^3}{t \cdot H^2} > \frac{2}{\pi^2 \sqrt{3 \cdot (1-\nu^2)}} \quad \text{für das Kriterium einer Beulung gilt.}$$

zu b)

Bei der Zylinderschale, deren beiden Enden fest eingespannt sind, wird man der Differentialgleichung mit folgendem Ansatz gerecht:

$$w(x) = C \cdot e^{\omega x}$$

Beim Einsetzen in die Differentialgleichung führt das zu der charakteristischen Gleichung:

$$\omega^4 + 2\alpha \cdot \omega^2 + \beta^2 = 0 \quad \text{mit} \quad 2\alpha = \frac{p}{N} \quad \text{und} \quad \beta^2 = \frac{12 \cdot (1 - \nu^2)}{a^2 \cdot t^2}$$

mit den 4 Lösungen:

$$\omega = \pm \sqrt{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}$$

Durch theoretische Ableitungen lässt sich herleiten, dass man den Fall der „festen Einspannung“ auf eine einfache Beziehung reduzieren kann, die auf die kritische Last des „gelenkig gelagerten“ Fall mit p_0 Bezug nimmt. (siehe hierzu Fall a)

Die vereinfachte Aussage hat dann die Form: $p_0^* = f \cdot p_0$

Der Faktor f muss dann einer Bestimmungsgleichung gerecht werden:

$$\underline{\underline{(1+f) \cdot \cos(\kappa \cdot \sqrt{f-1}) + (1-f) \cdot \cos(\kappa \cdot \sqrt{f+1}) = 2}}$$

$$\text{mit} \quad \underline{\underline{\kappa = \sqrt[4]{\frac{48 \cdot (1 - \nu^2) \cdot H^4}{a^2 \cdot t^2}}}}$$

Fallunterscheidungen:

$\kappa > 53$ Geltungsbereich für den Knickstab (Eulersche Knickung) mit

$$p_{kr}^* = E \cdot \frac{2\pi^2 \cdot a^2 \cdot t}{H^2}$$

$20 \leq \kappa \leq 53$ Geltungsbereich für die Beulung mit gelenkiger Lagerung mit

$$f(\kappa) \approx 1$$

$3,5 \leq \kappa < 20$ Geltungsbereich für die Beulung mit fester Einspannung mit

$$f(\kappa) \approx \frac{-253,8}{\kappa^2 - 31,92 \cdot \kappa + 7,692}$$

Bei Werten für $\kappa < 3,5$ nehmen die Werte für f extrem schnell zu. Hier muss dann in der Regel überprüft werden, ob die zulässigen Druckspannungen des Werkstoffs schon erreicht worden sind, ohne dass eine Ausbeulung überhaupt stattfindet!

Beim Zwischenbereich $20 \leq \kappa \leq 53$ erkennt man sehr schön erkennen, dass hier die feste Einspannung kaum ins Gewicht fällt, weil die Schalenhöhe so lang ist, dass die Lagerungsbedingung bzgl. der Ausbeulung unabhängig ist.

5. Nachwort

Wie man anhand der gezeigten Beispielprobleme im Skript ersehen konnte, ist der Schwierigkeitsgrad mit den fortlaufenden Abschnitten immer mehr gestiegen. Das liegt einmal daran, dass der Übergang von den 1-dimensionalen Problemen (Stäben) hin zu den ebenen 2-dimensionalen Problemen die zu lösende Differentialgleichung komplexer macht. Die Gleichungen der elastischen Biegelinie werden hier durch die Kirchhoffsche Plattentheorie abgelöst. Eine weitere Steigerung des Schwierigkeitsgrades zur Lösung von Instabilitätsproblemen erfahren wir dann noch, wenn der Übergang von den ebenen Plattenproblemen in den Bereich der Schalen mit gebogenen oder gar gekrümmten Flächen vollzogen wird. Um überhaupt noch analytisch lösbare Fälle untersuchen zu können, müssen dann zumeist sehr trickreiche Vereinfachungen in der Modellbetrachtung eingeführt werden. Oft wird die Krümmungsbeziehung auf einen leichteren Ausdruck reduziert, weil es sich um sehr kleinere Änderungen/Verschiebungen bei der Betrachtung handelt. Ebenso werden häufig unbedeutende Terme vernachlässigt, da sie als kleine Größen in einer höheren Potenz auftauchen bzw. in der Relation zu anderen Größen nicht ins Gewicht fallen. Daher muss man bei den zuletzt angeführten Problemfällen der Platten/Schalen die idealisierten Lösungen auch mit einer gewissen Vorsicht begegnen. Liegen wirklich die idealisierten Bedingungen vor, so können die Lösungen jedoch für eine Orientierung sorgen, wo sich die Gefahr einer Instabilität einstellen könnte.

Um im Bereich der Platten- und Schalentheorie die diversen Problemstellungen erörtern zu können, welche die Alltagswelt als realen Bezug zu bieten hat, müssen numerische Verfahren zur Anwendung kommen, wie beispielsweise die Finite-Elemente-Methode (FEM). Aber auch hier muss stets das simulierte Ergebnis mit Kontrolle (wenn Erfahrungswerte vorhanden sind) und mit Vorsicht betrachtet werden, weil die Instabilitätsprobleme als Probleme der Theorie 2. Ordnung (Betrachtung der Belastungen am verformten Bauteil) eine Stufe höher anzusiedeln sind, als die reinen strukturmechanischen Probleme der FEM, bei welchen allein die Spannungen/Verzerrungszustände im Bauteil zu untersuchen sind (stabile Probleme).

Und wie eingangs schon darauf hingewiesen wurde, diese Berechnungsvorlage darf keinesfalls dazu verwendet werden, um die Auslegung von Tragwerken oder tragenden Konstruktionen vorzunehmen! Das muss von Expertenseite aus mit den dazu geeigneten Berechnungswerkzeugen und nach den gesetzlich geforderten Regelwerken geschehen.



Quellenverweise und weiterführende Fachliteratur:

[1]

Höhere Technische Mechanik - von István Szabó
Springer-Verlag: Berlin – Heidelberg - New York - Tokio, 5.Aufl., zweiter Nachdruck

[2]

Höhere Mathematik, Teil III – von R. Rothe
B.G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig, 8. Auflage – 1954

[3]

Festigkeitslehre für den Konstrukteur – von H. Leipholz
Springer-Verlag: Berlin - Heidelberg - New York – 1969

[4]

Taschenbuch der Mathematik – Bronstein, Semendjajew, Musiol, Mühlig
Verlag Harri Deutsch, Thun, Frankfurt - 1.Auflage – 1993

[5]

Dubbel – Taschenbuch für den Maschinenbau
herausgegeben von W. Beitz und K.-H. Küttner
Springer-Verlag: Berlin - Heidelberg - New York - London - Paris : 17.Auflage

[6]

"Sammlung mathematischer Formeln" von H.Sieber und L.Huber
Klettbuch 7121, Offsetdruck: Emil Scheel , 1970