

Formoptimierte Kerbkonturen

Berechnung und Vergleich verschiedener Ansätze gemäß der Forderung einer bevorzugten Spannungskonstanz entlang einer Kerbkontur

von
Kai-Uwe Ekrutt

Februar 2017

Zweite Fassung 002.26032017

Inhaltsverzeichnis

	<u>Seite</u>
Vorwort	3
1. Kerbverlauf gemäß des CAO-Optimierungsansatzes	4
1.1 Die „Taschenrechner-Methode“ nach Marcus Scherrer:	4
1.2 Analytische Betrachtung an einem infinitesimal kleinen Konturstück:	7
1.3 Ergänzung: Anwendung des Optimierungsansatzes bzgl. Querkraft F_{Quer} !!!	18
2. Bionik-Design: Das Zugdreieck als Universalform	23
2.1 Die Zugdreieck-Methode:	23
2.2 Analytische Betrachtung des Kurvenverlaufs:	25
2.3 Der Tangens als Näherung:	27
2.4 Die Verfolgungskurven Traktrix und Radiodrome:	29
2.5 Die Baud-Kurve:	31
2.6 Baud-Kurve / Traktrix / Zugdreieck-Methode: Gibt es einen Unterschied?	37
2.7 Der real benötigte seitliche Bauraum:	40
3. Fazit	41
Quellenverweise und weiterführende Fachliteratur	45

Vorwort

Über das Design eines Bauteils lässt sich streiten, auch wenn alle gewünschten Funktionen und Anforderungen an dieses Bauteil unter einen Hut gebracht werden können. Gestalterisch wäre dem Konstrukteur theoretisch Tür und Tor weit geöffnet, sich bezüglich der Dimensionierung und Ausstattung des Bauteils auszutoben. Aber diese Tür schließt sich allmählich im Zuge der gestellten Aufgabenstellungen, die sich an die Gesamtkonstruktion richten. Schließlich müssen die Bauteile weiterhin eine belastungsgerechte Tragfähigkeit und Festigkeit behalten, aber auch im Hinblick der Erzeugung einer fertigungsbedingten Einfachheit zeigen, um im jeweiligen Kostenrahmen zu verbleiben. Andererseits muss das Bauteil auch den Randbedingungen des Bauraums und der Montage genügen, womit die wichtigsten Einflussfaktoren für das Aussehen und die Abmessungen erwähnt wären.

Sind im ersten Schritt alle diese Betrachtungen berücksichtigt worden, dann ergibt sich schon einmal ein grobes Bild des Bauteildesign. Für eine Optimierung und Verfeinerung der Gestaltung bieten sich dann weitere Methoden an, die am Bauteil durchgespielt werden können. Eine zumeist angestrebte Zielsetzung ist daher, dass am Bauteil möglichst viel Material eingespart werden soll, also eine Leichtbauweise favorisiert ist, um die Rohstoffkosten zu minimieren. Das Abspecken am Teil erfolgt somit oft durch die Berechnungen der Spannungen, Dehnungen und Verformungen mittels numerischer Verfahren wie der Finite-Elemente-Methode. Die numerische Simulation der Belastungen am Bauteil liefert als Ergebnis, wo man eventuell Material weglassen kann oder auch ergänzen muss. Als speziellere Methode hat sich für den Fall einer graduell optimierten Leichtbauweise die „Soft Kill Option“ (SKO) hervorgetan, um Schritt für Schritt die geringfügig belasteten Bauteilregionen zu eliminieren.

Das Bauteil erhält durch diese vorgeschalteten Prozeduren ein prä-optimiertes Aussehen, es besitzt also im Rahmen der Tragfähigkeit und der Festigkeitskriterien weiterhin eine adäquate Struktur. An diesem Punkt angelangt erfolgt die Überlegung, ob die Bauteiloptimierung noch weitere Verfeinerungen einschließen soll oder das Design als ausreichend abgeschlossen angesehen werden kann. Denn mit der SKO-Methode können trotzdem noch lokale Bereiche am Bauteil mit erhöhten Kerbspannungen vorliegen! Diese Areale bekommt man dann mit der CAO-Methode (Computer Aided Optimization) in den Griff. Diese Verfahrensweise simuliert dabei biologische Wachstums-/Schrumpfungsprozesse, um lokal erhöhte Kerbspannungen/entlastete Bereiche nach dem „Axiom der konstanten Spannungen“ anzupassen. Lokal erhöhte Spannungsgradienten werden also abgebaut und geglättet, so dass der „Spannungsfluss“ im Bauteil möglichst konstant bleibt. Diese Art der Optimierung stellt ein erfolgreiches Rezept dar, weil hiermit dynamisch belastete Bauteile schon wesentlich höhere Dauerfestigkeitswerte erreichen können, wenn gefährdende Kerbkonturen nur minimal in ihrem Verlauf verändert werden. Es ist ein lohnender Ansatz, um die Lebensdauer des Bauteils zu maximieren.

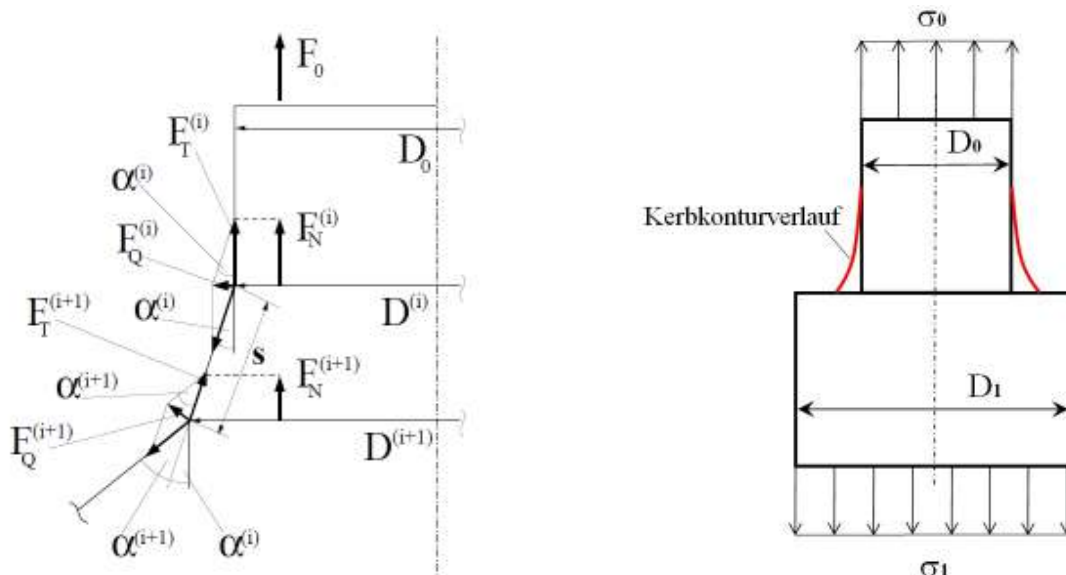
Das vorliegende Skript soll sich der spezifischen Aufgabe widmen, Methoden der Kerbspannungsoptimierung, wie das „Verfahren der Zugdreiecke“ und der CAO-Optimierungsansatz, im Detail analytisch zu betrachten, um daraus mathematisch definierte Formkonturen abzuleiten. Um eine Nachvollziehbarkeit der abgeleiteten Gleichungen zu ermöglichen, sollen in diesem Zusammenhang auch die entsprechenden Herleitungen mit angeführt werden.

1. Kerbverlauf gemäß des CAO-Optimierungsansatzes

1.1 Die „Taschenrechner-Methode“ nach Marcus Scherrer:

[1]

Bei dieser Methodik wird der Ansatz so gewählt, dass die umgeleiteten Tangentialkräfte an der Kontur einer Bauteilschulter (z.B. ein Wellenabsatz) einer bestimmten Gesetzmäßigkeit folgen sollen. Der Kerbverlauf wird dabei in mehrere Knick aufgeteilt, wobei sich aus dem Knickwinkel und der vorliegenden Tangentialkraft F_T eine resultierende Querkzugkraft F_Q ergibt. Der Optimierungsansatz ergibt sich aus der Überlegung, dass entlang der Kerbkontur ein konstanter Spannungsverlauf gewünscht sei. Die resultierenden Querkzugkräfte F_Q , welche die Kerbkontur aufbiegen und somit für zusätzliche Kerbspannungen sorgen, sollen dabei durch die vorliegende Querschnittsverbreiterung an jener Stelle kompensiert werden. Denn durch die allmähliche Querschnittszunahme reduzieren sich die entsprechenden Nennspannungen am Bauteil, womit als Forderung gelten würde, dass die Zunahme der lokalen Querkzugkräfte F_Q genau so groß ausfallen möge wie die Abnahme der lokalen Tangentialkräfte F_T .



Tangential- und Querkkräfte (entnommen aus [1])

Spannungen an der Bauteilschulter

Für den einfachen Fall der gleichmäßig verteilten Zugspannungen errechnen sich σ_0 und σ_1 direkt durch die vertikal wirkende Zugkraft F_0 und über die vorliegenden Querschnittsflächen ΔA_0 und ΔA_1 . Ändert sich die Bauteilbreite D nur in eine Richtung, dann nimmt der Querschnitt linear zu, ändert sich das Bauteil auch gleichzeitig in der Bauteiltiefe (beispielsweise als Durchmesser), dann verläuft die Querschnittszunahme quadratisch.

$$\sigma_0 = \frac{F_0}{\Delta A_0}$$

$$\sigma_1 = \frac{F_0}{\Delta A_1}$$

Bei der Methodik nach Scherrer sei die Annahme so gesetzt, dass die Querschnittszunahme linear mit D verläuft. Die lokalen Tangentialkräfte entlang der Kerbkontur errechnen sich dann wie folgt:

$$\boxed{F_T^i = F_0 \cdot \frac{D_0}{D_i} \cdot \cos\left(\sum_{k=0}^{i-1} \alpha_k\right)} \quad \text{mit} \quad \boxed{F_N^i = F_0 \cdot \frac{D_0}{D_i}} \quad \boxed{F_T^{i+1} = F_0 \cdot \frac{D_0}{D_{i+1}} \cdot \cos\left(\sum_{k=0}^i \alpha_k\right)}$$

Über den Sinussatz ergeben sich dann die zugeordneten Querzugkräfte:

$$F_Q^i = 2 \cdot F_T^i \cdot \sin\left(\frac{\alpha_i}{2}\right)$$

$$F_Q^{i+1} = 2 \cdot F_T^{i+1} \cdot \sin\left(\frac{\alpha_{i+1}}{2}\right)$$

Wählt man einen festen Wert für die stückweise angesetzte Segmentlänge s , dann folgt damit die Bauteilbreitenzunahme zum nächsten Schritt.

$$D_{i+1} = D_i + 2 \cdot s \cdot \sin\left(\sum_{k=0}^i \alpha_k\right)$$

Als einzuhaltendes Kriterium wird der schon erwähnte Optimierungsansatz vorangestellt, um hierüber die nachfolgenden Werte für die Tangential- und Querzugkraft zu bestimmen. Um dieses zu erreichen, muss eine Berechnungsvorschrift entwickelt werden, mit welcher der nächste Schrittwinkel α_{i+1} ermittelt werden kann.

$$\Delta F_T = -\Delta F_Q$$

$$\begin{aligned} \rightarrow & (F_T^{i+1} - F_T^i) = -(F_Q^{i+1} - F_Q^i) \\ \rightarrow & F_Q^{i+1} = F_Q^i + (F_T^i - F_T^{i+1}) \\ \rightarrow & \frac{F_Q^{i+1}}{F_T^{i+1}} = \frac{F_Q^i}{F_T^{i+1}} + \left(\frac{F_T^i}{F_T^{i+1}} - 1\right) \\ \rightarrow & \frac{F_Q^{i+1}}{F_T^{i+1}} = \frac{2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha_i}{2}\right) \cdot F_0 \cdot \frac{D_0}{D_i} \cdot \cos\left(\sum_{k=0}^{i-1} \alpha_k\right)}{F_0 \cdot \frac{D_0}{D_{i+1}} \cdot \cos\left(\sum_{k=0}^i \alpha_k\right)} + \frac{F_0 \cdot \frac{D_0}{D_i} \cdot \cos\left(\sum_{k=0}^{i-1} \alpha_k\right)}{F_0 \cdot \frac{D_0}{D_{i+1}} \cdot \cos\left(\sum_{k=0}^i \alpha_k\right)} - 1 \\ \rightarrow & \frac{F_Q^{i+1}}{F_T^{i+1}} = \frac{\frac{D_{i+1}}{D_i} \cdot \cos\left(\sum_{k=0}^{i-1} \alpha_k\right) \cdot \left(2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha_i}{2}\right) + 1\right) - \cos\left(\sum_{k=0}^i \alpha_k\right)}{\cos\left(\sum_{k=0}^i \alpha_k\right)} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \alpha_{i+1} = 2 \cdot \arcsin\left[\frac{F_Q^{i+1}}{2 \cdot F_T^{i+1}}\right] = 2 \cdot \arcsin\left[\frac{\frac{D_{i+1}}{D_i} \cdot \cos\left(\sum_{k=0}^{i-1} \alpha_k\right) \cdot \left(2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha_i}{2}\right) + 1\right) - \cos\left(\sum_{k=0}^i \alpha_k\right)}{2 \cdot \cos\left(\sum_{k=0}^i \alpha_k\right)}\right]$$

Mit der Bestimmung des nachfolgenden Schrittwinkels ist die Berechnungskette geschlossen und die Prozedur kann von Neuen beginnen. Die Berechnungsschleife besteht also nur darin, über den Schrittwinkel die nächste Bauteilbreitenzunahme zu erhalten und umgekehrt.

$$\dots \rightarrow \alpha_i \rightarrow D_{i+1} \rightarrow \alpha_{i+1} \rightarrow D_{i+2} \rightarrow \alpha_{i+2} \rightarrow D_{i+3} \rightarrow \dots$$

Um den Kurvenverlauf in einem Diagramm darstellen zu können, fehlt noch eine Koordinate, die senkrecht zu den Durchmessern D_i (bzw. den Radien $D_i/2$) liegt. Die Bauteillängen-Koordinate soll als X_i gekennzeichnet werden und errechnet sich folgendermaßen:

$$X_{i+1} = X_i + s \cdot \cos\left(\sum_{k=0}^i \alpha_k\right)$$

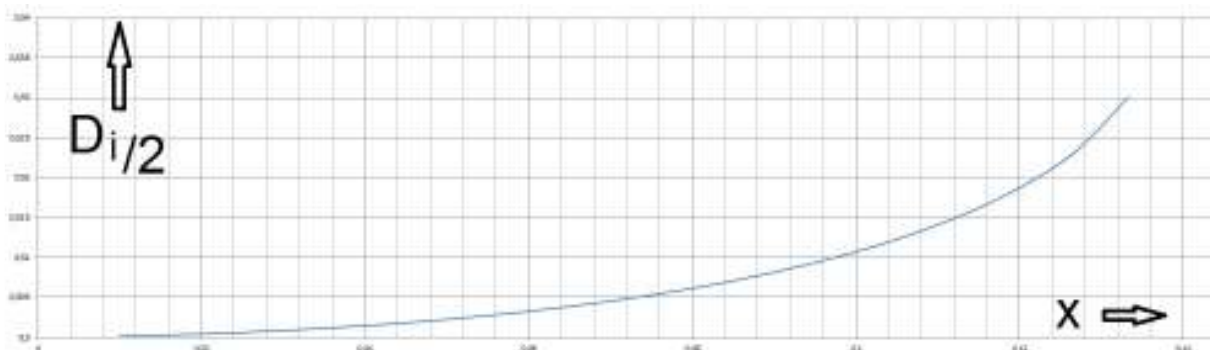
Als Startbedingungen müssen nun einige Anfangswerte gesetzt werden:

$$D_0 / X_0 / s / \alpha_0 \text{ und } \alpha_{-1} = 0.$$

Die Abbruchbedingung der Berechnungsprozedur ist dann erreicht, wenn der gesamte Umlenkwinkel sich einem bestimmten Wert nähert. Bei der Optimierung von Kerbverläufen soll dieser Wert einen Winkel von 45° anstreben. Wie man an den Ausgangswerten der Startbedingung erkennen kann, ist es für die Berechnung des Kurvenverlaufs nicht notwendig, die Zugkraft F_0 zu berücksichtigen. Für die Belange der Kraftumlenkung ist es nicht wichtig, wie groß die Kraft ist, sondern dass die Relation $\Delta F_T / \Delta F_Q = -1$ als Optimierungskriterium gilt.

$$\text{Abbruchbedingung: } \sum_{k=0}^i \alpha_k = 45^\circ \quad \text{bzw.} \quad = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

Errechneter Kurvenverlauf für die Werte: $D_0 = 1 / X_0 = 0 / s = 0,01 / \alpha_0 = 0,8^\circ$



Der Kurvenverlauf mittels dieser recht anschaulichen Methode ist in erster Linie eine grobe Annäherung (siehe hierzu [2]), um eine gestaltähnliche Kontur zu erhalten. Als normierter Kurvenverlauf ($D_0 = 1$) kann er durch eine entsprechende Skalierung in die gewünschte Problemzone der Bauteilschulter übertragen werden.

Der Verlauf hängt bei dieser Methode sehr stark von den Anfangswerten von s und α_0 ab! Wird beispielsweise die Segmentlänge s verdoppelt, dann flacht der Kurvenverlauf in der entsprechenden Proportion ab. Wird dagegen α_0 verdoppelt, dann steigt der Kurvenast um diesen Faktor schneller an. Sehr ähnliche Ergebnisse ergeben sich dann, wenn s und α_0 zugleich um denselben Faktor gestreckt oder gestaucht werden.

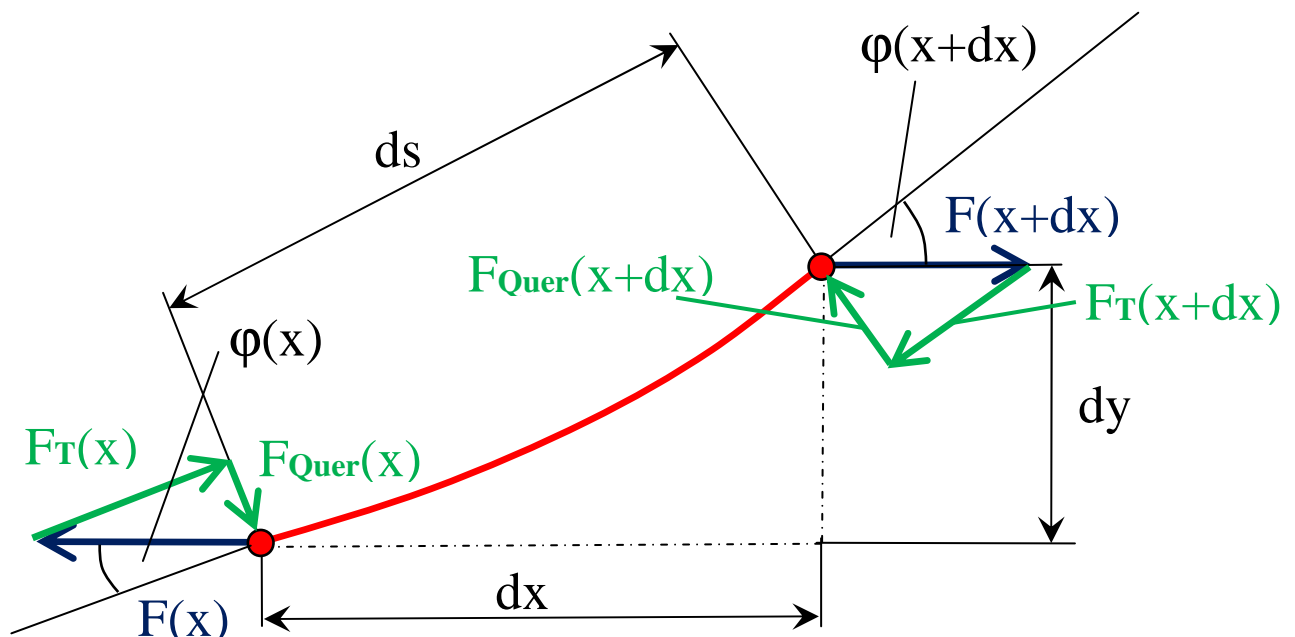
Da sich mit dieser Methode eher nur gestaltähnliche Konturen (skalierungsvariabel!) ableiten lassen, soll im Folgenden der Versuch unternommen werden, eine dem wirklichen Bauraum angepasste Lösung zu finden.

1.2 Analytische Betrachtung an einem infinitesimal kleinen Konturstück:

Ähnlich wie bei der Betrachtungsweise zuvor, bei welcher der Optimierungsansatz an einer stückweise fortschreitenden Kurvensegmentierung durchgespielt wurde, soll nun die Gesetzmäßigkeit auf ein unendlich kleines Linienstück übertragen werden. An diesem Linienelement müssen dann auf jeden Fall die Kräfte- und Momenten-Gleichgewichte herrschen. Mit der Zusatzbedingung des Optimierungsansatzes lässt sich dann eine Differentialgleichung für unser Problem ableiten.

Des Weiteren soll bei der Herleitung auf die speziellen Belastungsarten eingegangen werden, da bei der vorherigen Methode nur von einer rein axialen Zugkraft die Rede war, bei der sich die Zugspannungen homogen über den Bauteilquerschnitt verteilt haben. Bei einer Biegebelastung haben wir jedoch einen oft auftretenden Fall, bei dem die Normalspannungen ansatzmäßig linear zum Bauteilrand hin zunehmen. Außerdem muß man auch der Bauteilgeometrie Rechnung tragen, in welcher Weise die Querschnittszunahme erfolgt. Bisher sind wir davon ausgegangen, dass das Bauteil eine konstante Breite hat und der Querschnitt nur in der Höhendimension zunimmt. Meist wird jedoch der Querschnitt in beide Richtungen zunehmen (Breite x Höhe bzw. als Durchmesser) und somit quadratisch ansteigen. Hiermit ergeben sich andere Verhältnisse für die vorliegende Kräfteverteilung im Bereich der zu ermittelnden Kerbkontur, wodurch sich dann auch ein anderer Verlauf ergeben sollte.

Die Kräfte am Linienelement (rot):



Wichtiger Hinweis zur Bezeichnung F_{Quer} :

Die Bezeichnung der lokalen Querkzugkraft F_Q aus 1.1 ist etwas irreführend, weil es sich in Wirklichkeit um eine quer zu F_T wirkende Kraft handelt, die differentiell klein ist, aber nicht als Querkraftkomponente von F_T gilt! Ersichtlich wird das, wenn der Schrittwinkel α_i gegen immer kleinere Werte läuft. Dann ändert sich an F_T nichts, jedoch F_Q wird entsprechend immer kleiner und läuft gegen dF_Q . Daher handelt es sich bei F_{Quer} nicht um F_Q !!!

$$\alpha_i \rightarrow d\alpha_i \quad \Rightarrow \quad dF_Q^i = 2 \cdot F_T^i \cdot \sin\left(\frac{d\alpha_i}{2}\right) \approx F_T^i \cdot d\alpha_i \quad \text{d.h.} \quad \boxed{dF_Q = F_{T(x)} \cdot d\varphi}$$

Wenn man also in Anlehnung der Methode nach Scherrer (siehe [1] und [2]) mit differentiell kleinen Elementen arbeiten will, dann darf der Begriff der „Querkraft“, so wie man ihn aus der Technischen Mechanik im Rahmen der Schnittlastermittlung kennt, nicht mit dem lokalen Querzug F_Q verwechselt bzw. durcheinander gebracht werden! Dass dies sonst zu falschen Ergebnissen führt, soll dann einmal im Abschnitt 1.3 exemplarisch durchgespielt werden.

Gleichgewichtsbedingungen:

$$F_{(x)} \cdot dy = F_{\text{Quer}(x)} \cdot ds \quad \rightarrow \quad F_{\text{Quer}(x)} = F_{(x)} \cdot \sin \varphi = F_{T(x)} \cdot \tan \varphi \quad \rightarrow \quad F_{T(x)} = F_{(x)} \cdot \cos \varphi$$

Beim Optimierungsansatz ist nun darauf zu achten, dass die Differentiation nicht an F_Q vorgenommen wird, sondern an $d(F_Q)$.

Optimierungsansatz:

$$\boxed{d(dF_{Q(x)}) = -dF_{T(x)}} \rightarrow \frac{d}{dx} \left(\frac{dF_{Q(x)}}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{F_{T(x)} \cdot d\varphi(x)}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left(F_{T(x)} \cdot \left(\frac{d\varphi(x)}{dx} \right) \right) = \underline{\underline{-\frac{dF_{T(x)}}{dx}}}$$

In der Skizze der „Kräfte am Linienelement“ ist zu ersehen, dass in der Horizontalen eine Zugkraft $F(x)$ herrscht. Mit jeder Wegänderung dx in x -Richtung ändert sich auch diese Zugkraft, weil die Bauteilquerschnitte in y -Richtung ebenfalls eine Änderung erfahren. Am linken und rechten Schnittlastufer sind daher auch die Gleichgewichtsbedingungen einzuhalten, in unserem Fall dargestellt durch das Momenten/Kräfte-Gleichgewicht an der linken Seite des Linienelements.

Die Zugkraft $F(x+dx)$ an der rechten Seite lässt sich mittels der Taylor-Reihenentwicklung in eine Summe umformen, die man als ausreichende Näherung nach dem zweiten Glied enden lassen kann, denn höhere Ordnungen mit $(dx)^n$ haben nur noch verschwindend kleinen Einfluss auf die Summe.

$$F_{(x+dx)} = F_{(x)} + \frac{F'_{(x)}}{1!} \cdot dx + \frac{F''_{(x)}}{2!} \cdot (dx)^2 + \frac{F'''_{(x)}}{3!} \cdot (dx)^3 + \dots$$

$$\rightarrow F_{(x+dx)} \approx F_{(x)} + \frac{F'_{(x)}}{1!} \cdot dx = F_{(x)} + \frac{dF_{(x)}}{dx} \cdot dx = F_{(x)} + dF_{(x)}$$

D.h., innerhalb des Weginkrements dx ändert sich die Zugkraft um $dF(x)$. Das gleiche gilt dann auch für die Tangential- und Querzugkraft und den Steigungswinkel, die sich um $dF_T(x)$, $dF_Q(x)$ und $d\varphi(x)$ ändern werden. Das sind die differentiell kleinen Änderungen, welche mit dem Optimierungsansatz in Einklang gebracht werden müssen. Dazu ist es nötig, den funktionalen Zusammenhang der Tangentialkraft $F_T(x)$ und der Zugkraft $F(x)$ vorzugeben. Als allgemein gehaltene Ausdrücke nehmen sie dabei folgende Form an:

$$F_{(x)} = F_0 \cdot \left(\frac{y_0}{y(x)} \right)^n \quad F_{T(x)} = F_{(x)} \cdot \cos \varphi = F_0 \cdot \left(\frac{y_0}{y(x)} \right)^n \cdot \cos \varphi$$

Die Zugkraft F_0 stellt dabei den Wert dar, der bei der Bauteilabmessung y_0 (Betrachtung ohne Schulter) vorliegen würde. Mit größer werdenden Abmessungen $y(x)$ nehmen die Kräfte in Zugrichtung weiter ab, was über die Relation $y_0/y(x)$ ausgedrückt wird. Der Exponent n verallgemeinert die Problemstellung im Hinblick darauf, wie sich die Bauteilspannungen in Zugrichtung mit größer werdenden Abmessungen ändern. Korrespondierend hierzu ändern sich dann auch die lokalen Zugkräfte $F(x)$.

Fall 1: reiner Zug in axialer Richtung des Bauteils

Die Abmessungen y ändern sich in eine Dimension (Höhe H)	$n=1$
Die Abmessungen y ändern sich in zwei Dimensionen (Durchmesser D)	$n=2$

Fall 2: Biegespannungen in axialer Richtung des Bauteils

Die Abmessungen y ändern sich in eine Dimension (Höhe H)	$n=2$
Die Abmessungen y ändern sich in zwei Dimensionen (Durchmesser D)	$n=3$

Bei den Biegespannungen σ_b (Fall 2) erklärt sich der Exponent n durch die Betrachtung des Widerstandsmoments W_z der Querschnittsfläche vom Bauteil, welche sich um die z -Achse biegt (senkrecht zur x - y -Ebene).

Rechteckquerschnitt ($B \times H$):
$$W_z = \frac{B \cdot H^2}{6} \rightarrow \sigma_b \sim \frac{1}{H^2}$$

Kreisquerschnitt ($\emptyset D$):
$$W_z = \frac{\pi \cdot D^3}{32} \rightarrow \sigma_b \sim \frac{1}{D^3}$$

Aufstellen der Differentialgleichung für die Kerbformoptimierung:

Zuerst werden die Differentialquotienten des Optimierungsansatzes als Ableitungen nach dx bestimmt.

Ausgangsgleichung:
$$\frac{d}{dx} \left(\frac{dF_{Q(x)}}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{F_{T(x)} \cdot d\varphi(x)}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left(F_{T(x)} \cdot \left(\frac{d\varphi(x)}{dx} \right) \right) = \frac{-dF_{T(x)}}{dx}$$

mit
$$\frac{d}{dx} () = ()'$$

(a)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{dF_{Q(x)}}{dx} \right) &= \frac{d}{dx} \left(F_{T(x)} \cdot \left(\frac{d\varphi(x)}{dx} \right) \right) = \frac{d}{dx} \left(F_{(x)} \cdot \cos \varphi_{(x)} \cdot \varphi_{(x)}' \right) \\ &= F_{(x)}' \cdot \cos \varphi_{(x)} \cdot \varphi_{(x)}' - F_{(x)} \cdot \sin \varphi_{(x)} \cdot \left(\varphi_{(x)}' \right)^2 + F_{(x)} \cdot \cos \varphi_{(x)} \cdot \varphi_{(x)}'' \end{aligned}$$

(b)

$$\frac{-dF_{T(x)}}{dx} = -\frac{d}{dx} \left(F_{(x)} \cdot \cos \varphi_{(x)} \right) = -F_{(x)}' \cdot \cos \varphi_{(x)} + F_{(x)} \cdot \sin \varphi_{(x)} \cdot \varphi_{(x)}'$$

Das Gleichsetzen von (a) und (b) ergibt dann:

$$F_{(x)}' \cdot \cos \varphi_{(x)} \cdot \varphi_{(x)}' - F_{(x)} \cdot \sin \varphi_{(x)} \cdot \left(\varphi_{(x)}'\right)^2 + F_{(x)} \cdot \cos \varphi_{(x)} \cdot \varphi_{(x)}'' = -F_{(x)}' \cdot \cos \varphi_{(x)} + F_{(x)} \cdot \sin \varphi_{(x)} \cdot \varphi_{(x)}'$$

$$\rightarrow F_{(x)}' \cdot \cos \varphi_{(x)} \left(1 + \varphi_{(x)}'\right) + F_{(x)} \cdot \left(\cos \varphi_{(x)} \cdot \varphi_{(x)}'' - \sin \varphi_{(x)} \cdot \left(\varphi_{(x)}'\right)^2 - \sin \varphi_{(x)} \cdot \varphi_{(x)}'\right) = 0$$

$$\rightarrow F_{(x)}' \cdot \left(1 + \varphi_{(x)}'\right) + F_{(x)} \cdot \left(\varphi_{(x)}'' - \tan \varphi_{(x)} \cdot \left(\varphi_{(x)}'\right)^2 - \tan \varphi_{(x)} \cdot \varphi_{(x)}'\right) = 0$$

Die Ableitung von F(x) wäre:

$$F_{(x)} = F_0 \cdot \left(\frac{y_0}{y(x)}\right)^n \rightarrow \frac{d}{dx}(F_{(x)}) = -F_0 \cdot n \cdot \left(\frac{y_0}{y(x)}\right)^n \cdot \frac{y(x)'}{y(x)} = -F_{(x)} \cdot \left(n \cdot \frac{y(x)'}{y(x)}\right)$$

$$\rightarrow -F_{(x)} \cdot \left(n \cdot \frac{y(x)'}{y(x)}\right) \cdot \left(1 + \varphi_{(x)}'\right) + F_{(x)} \cdot \left(\varphi_{(x)}'' - \tan \varphi_{(x)} \cdot \left(\varphi_{(x)}'\right)^2 - \tan \varphi_{(x)} \cdot \varphi_{(x)}'\right) = 0$$

$$\rightarrow -F_{(x)} \cdot \left(n \cdot \frac{y(x)'}{y(x)}\right) \cdot \left(1 + \varphi_{(x)}'\right) + F_{(x)} \cdot \varphi_{(x)}'' - F_{(x)} \cdot \tan \varphi_{(x)} \cdot \varphi_{(x)}' \cdot \left(1 + \varphi_{(x)}'\right) = 0$$

An dieser Stelle kann nun die Zugkraft F(x) aus der Gleichung herausgekürzt werden.

$$\rightarrow \frac{\varphi_{(x)}''}{1 + \varphi_{(x)}'} - \tan \varphi_{(x)} \cdot \varphi_{(x)}' = n \cdot \frac{y(x)'}{y(x)} \quad \text{DGL bzgl. } x, y, \varphi$$

Die jetzige Form der Differentialgleichung wird nun weiter umgeformt, um die Variablen trennen zu können.

$$\rightarrow \frac{d\varphi_{(x)}'}{dx} \cdot \frac{1}{1 + \varphi_{(x)}'} - \tan \varphi_{(x)} \cdot \frac{d\varphi_{(x)}}{dx} = n \cdot \frac{dy(x)/dx}{y(x)} \rightarrow \frac{d\varphi_{(x)}'}{1 + \varphi_{(x)}'} - \tan \varphi_{(x)} \cdot d\varphi_{(x)} = \frac{n}{y(x)} \cdot dy(x)$$

$$\rightarrow \int_{\varphi_0'}^{\varphi_1'} \frac{1}{1 + \varphi_{(x)}'} \cdot d\varphi_{(x)}' - \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \tan \varphi_{(x)} \cdot d\varphi = \int_{y_0}^{y_1} n \cdot \frac{1}{y} \cdot dy$$

mit

$$- \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \tan \varphi_{(x)} \cdot d\varphi = \ln \left(\frac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi_0} \right)$$

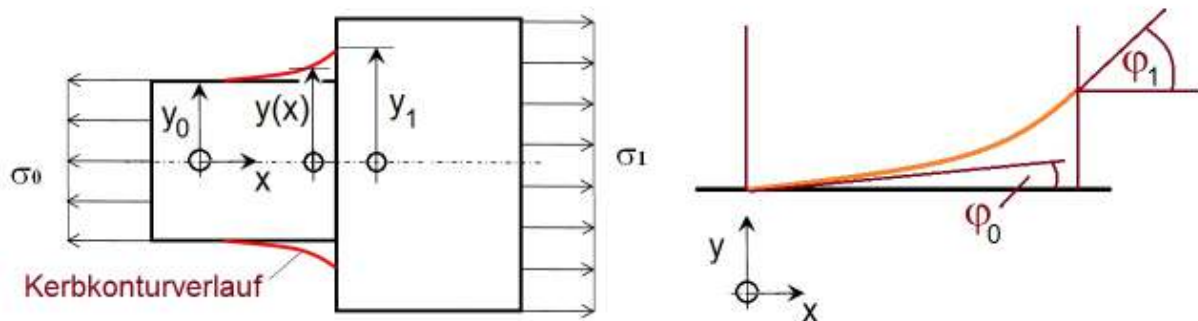
$$\int_{\varphi_0'}^{\varphi_1'} \frac{1}{1 + \varphi_{(x)}'} \cdot d\varphi_{(x)}' = \ln \left(\frac{1 + \varphi_1'}{1 + \varphi_0'} \right)$$

$$\int_{y_0}^{y_1} n \cdot \frac{1}{y} \cdot dy = n \cdot \ln\left(\frac{y_1}{y_0}\right)$$

$$\rightarrow \ln\left(\frac{1+\varphi'_1}{1+\varphi'_0}\right) + \ln\left(\frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi_0}\right) = n \cdot \ln\left(\frac{y_1}{y_0}\right) \quad \rightarrow \quad \frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi_0} \cdot \left(\frac{1+\varphi'_1}{1+\varphi'_0}\right) = \left(\frac{y_1}{y_0}\right)^n$$

Jetzt wären wir theoretisch soweit, dass über die Randbedingungen der Steigungswinkel und deren Ableitungen ($\varphi_0, \varphi_1, \varphi'_0, \varphi'_1$) von dieser Kurve die gefragte Bauteilabmessung y_1 berechnet werden könnte. (siehe nachfolgende Skizze)

$$\left(\frac{y_1}{y_0}\right) = \sqrt[n]{\frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi_0} \cdot \left(\frac{1+\varphi'_1}{1+\varphi'_0}\right)}$$



$y(x)$ = Radiuswerte bzgl. Achse

Da aber nur die Randbedingungen der Steigungswinkel bekannt sind, jedoch nicht die Ableitungen in den Kurvenpunkten von φ_0 und φ_1 , fehlen uns diese Angaben, um y_1 bestimmen zu können. Das bedeutet, dass die Bauraumgleichung (weiterhin eine DGL!) erst gelöst werden müsste. Daher soll eine Umformung geschehen, in welcher nur noch $y(x)$ -Funktionen vorliegen werden.

$$y' = \frac{dy}{dx} = \tan\varphi \quad \rightarrow \quad \varphi = \arctan(y')$$

$$\varphi' = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{d}{dx}[\arctan(y')] = \frac{y''}{1+(y')^2}$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{y(x)}{y_0} \right) &= \left[\frac{\cos(\arctan(y'))}{\cos \varphi_0} \cdot \left(\frac{1 + \frac{y''}{1+(y')^2}}{1 + \varphi'_0} \right) \right]^{1/n} = \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(\arctan(y'))}} \cdot \left(\frac{1 + \frac{y''}{1+(y')^2}}{1 + \varphi'_0} \right) \right]^{1/n} \\ &= \left[\frac{1}{\cos \varphi_0 \cdot \sqrt{1+(y')^2}} \cdot \left(\frac{1 + \frac{y''}{1+(y')^2}}{1 + \varphi'_0} \right) \right]^{1/n} = \left[\frac{1}{\cos \varphi_0 \cdot (1 + \varphi'_0)} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}} + \frac{y''}{[1+(y')^2]^{3/2}} \right) \right]^{1/n} \end{aligned}$$

Der Ausdruck $\frac{y''}{[1+(y')^2]^{3/2}}$ ist in der Mathematik als sogenannte Krümmung $K(x)$ bekannt.

$$\boxed{\left(\frac{y(x)}{y_0} \right) = \left[\frac{1}{\cos \varphi_0 \cdot (1 + \varphi'_0)} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}} + K(x) \right) \right]^{1/n}} \quad \text{DGL mit } y(x)\text{-Funktionen}$$

Es handelt sich hier um eine nichtlineare Differentialgleichung der 2. Ordnung, deren Lösung nicht mehr so einfach hergeleitet werden kann. Das bedeutet für das weitere Vorgehen, dass die Bauraumgleichung keine explizite Lösung liefert, sondern über den numerischen Weg die einzelnen Punkte der Kurve zu errechnen sind.

Getreu der Devise „Die Natur macht keine Sprünge“ ist qualitativ davon auszugehen, dass die Kurve bei $x_0 \rightarrow -\infty$ beginnt (asymptotisch hin zum Wert y_0 strebend) und mit der Steigung $\varphi'_0 = 0$ startet. Dort besitzt sie auch noch keine Krümmung, es ist also $K_0 = 0$. Am Startpunkt x_0 folgt damit als Bestätigung:

$$\left(\frac{y_0}{y_0} \right) = \left[\frac{1}{\cos 0 \cdot (1+0)} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1+(0)^2}} + 0 \right) \right]^{1/n} = 1 \quad \text{q.e.d.}$$

Die weitere Herausforderung besteht nun darin, mit dem Ausdruck für den Bauraum eine Methode zu entwickeln, mit welcher in Einzelschritten die Punkte der Kurve berechnet werden, ähnlich wie es im Abschnitt 1.1 mit der „Taschenrechner“-Methode erfolgt ist. Der wesentliche Unterschied besteht aber jetzt darin, dass die Berechnungen an einer analytisch korrekten Gleichung (im Sinne des Optimierungsansatzes) ausgerichtet sind und dass wir einen direkten Einfluss auf den Schrittparameter $d\varphi$ haben, somit auch über die Qualität des Kurvenverlaufs entscheiden können. Denn wie wir gesehen haben, liefert die Methode nach Scherrer von Schritt zu Schritt immer größere Winkelsprünge, sodass zum Ende der Kurve hin nur gröbere Linienzüge ergänzt werden. Dieser Nachteil kann mit der folgenden Methode behoben werden.

Zuerst werden die vorauszusetzenden Randbedingungen am Startpunkt (\tilde{x}_0, y_0) in die Gleichung eingesetzt und für den Fall $n=1$ betrachtet:

(\tilde{x}_0 wurde dabei in den Ursprung gelegt)

$$\boxed{\left(\frac{y(x)}{y_0}\right) = \left[\cos \varphi_{(x)} \cdot (1 + \varphi'_{(x)})\right]} \quad \text{Ausgangsgleichung für } n = 1, \quad \varphi_0 = 0, \quad \varphi'_0 = 0$$

Als Schrittparameter gilt: $\Delta\varphi$ $i = 1; 2; 3; \dots$

$$\varphi_i = i \cdot \Delta\varphi \quad \Delta x_i = \frac{\Delta y_{i+1}}{\tan \varphi_i} \quad x_i = \tilde{x}_0 + \sum_{k=1}^i \Delta x_k \quad \Delta y_{i+1} = y_i - y_{i-1}$$

Gemäß der obigen Ausgangsgleichung errechnen sich die y-Werte wie folgt:

$$\boxed{y_i = y_0 \cdot \left[\cos \varphi_i \cdot \left(1 + \frac{\Delta\varphi}{\Delta x_i} \right) \right]} \quad \text{wobei } \left[\cos \varphi_i \cdot \left(1 + \frac{\Delta\varphi}{\Delta x_i} \right) \right] > 1 \text{ zu sein hat!}$$

Die Schwierigkeit besteht nun darin, dass das Weginkrement Δx_i bisher nicht bekannt ist. Für den Fall $n=1$ kann man diesen Wert in guter Näherung bestimmen, um auch den obigen Gleichungen zu genügen.

$$\Delta x_i = \frac{\Delta y_{i+1}}{\tan \varphi_i} = \frac{y_i - y_{i-1}}{\tan \varphi_i} = \left(y_0 \cdot \left[\cos \varphi_i \cdot \left(1 + \frac{\Delta\varphi}{\Delta x_i} \right) \right] - y_{i-1} \right) \cdot \frac{1}{\tan \varphi_i}$$

$$\Delta x_i \cdot \frac{\tan \varphi_i}{y_0 \cdot \cos \varphi_i} = 1 + \frac{\Delta\varphi}{\Delta x_i} - \frac{y_{i-1}}{y_0 \cdot \cos \varphi_i}$$

$$\rightarrow \Delta x_i^2 + \Delta x_i \cdot \left[\frac{y_{i-1} - y_0 \cdot \cos \varphi_i}{\tan \varphi_i} \right] - \frac{\Delta\varphi \cdot y_0 \cdot \cos \varphi_i}{\tan \varphi_i} = 0$$

Diese quadratische Gleichung wird bzgl. der positiven Lösung von Δx_i aufgelöst:

$$\boxed{\Delta x_i = \frac{y_0 \cdot \cos \varphi_i - y_{i-1}}{2 \cdot \tan \varphi_i} + \sqrt{\left(\frac{y_0 \cdot \cos \varphi_i - y_{i-1}}{2 \cdot \tan \varphi_i} \right)^2 + \frac{\Delta\varphi \cdot y_0 \cdot \cos \varphi_i}{\tan \varphi_i}}}$$

Damit wäre der erste Wert Δx_1 aus den Randbedingungen berechenbar:

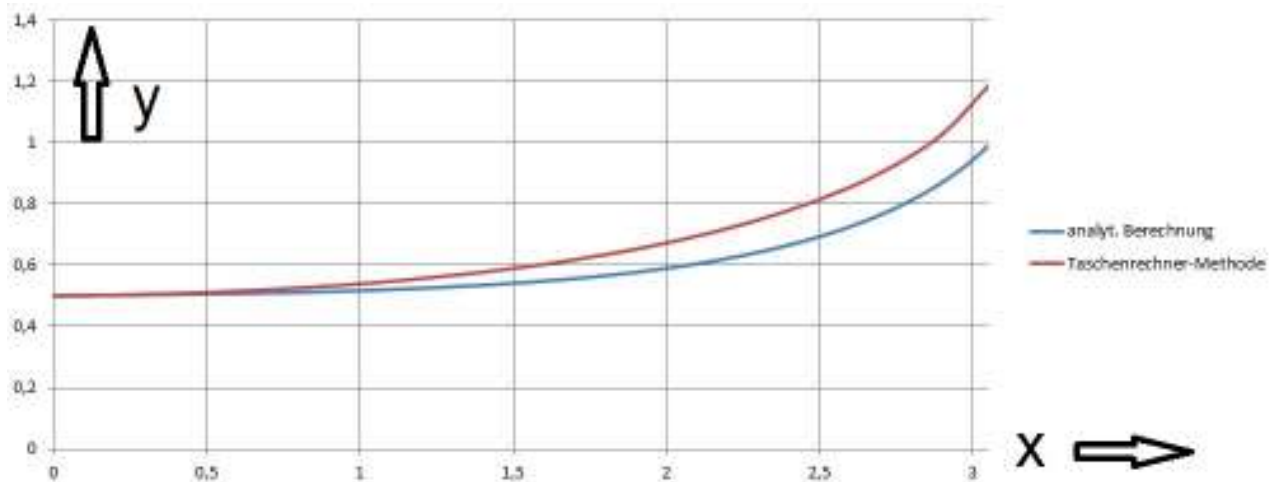
$$\Delta x_1 = \frac{y_0 \cdot \cos \varphi_1 - y_0}{2 \cdot \tan \varphi_1} + \sqrt{\left(\frac{y_0 \cdot \cos \varphi_1 - y_0}{2 \cdot \tan \varphi_1} \right)^2 + \frac{\Delta\varphi \cdot y_0 \cdot \cos \varphi_1}{\tan \varphi_1}} \quad \text{mit} \quad \varphi_1 = \Delta\varphi$$

Die weiteren Δx_i können schließlich über diesen Schritt ebenfalls berechnet werden, bis der Grenzwinkel $\varphi_i \geq 45^\circ$ ($= \pi/4$ rad) erreicht worden ist.

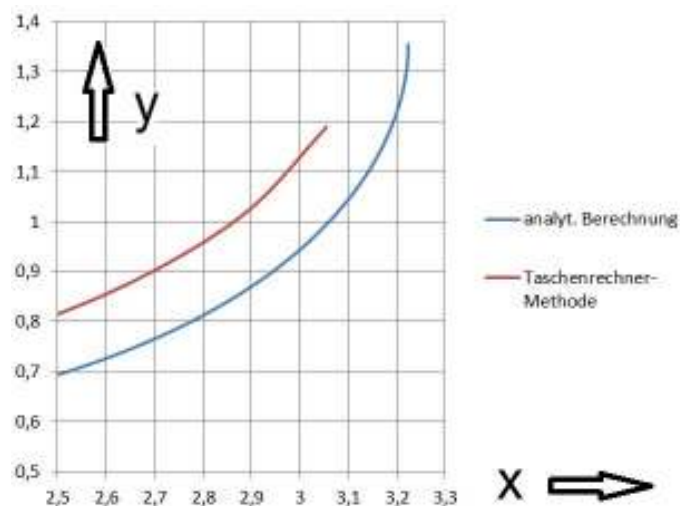
Um einen Vergleich mit der Kurve aus Abschnitt 1.1 zu erhalten, werden die folgenden Randbedingungen angenommen:

$$\tilde{x}_0 = 0 \quad y_0 = 0.5 \quad \text{und} \quad \Delta\varphi = 0,8^\circ (= 0.01396 \text{ rad}) \quad i = 1 \dots 57$$

Vergleich der beiden Methoden:



Der Kurvenast aus der „Taschenrechner“-Methode (rot) wurde in diesem Beispiel so skaliert, dass er den Tangentenwinkel von 45° beim Wert $x = 3,055$ (genau wie bei der blauen Kurve) besitzt. Der Verlauf der analytisch berechneten Kurve (blau) steigt im Anfangsbereich weniger stark an, krümmt sich gegen Ende des Kurvenastes dafür umso mehr und endet bei $y=1,00$. Im weiteren Verlauf nimmt diese Krümmung immer mehr zu und erreicht bei $x=3,23$ und $y_{\max} = 1,35$ einen maximalen Anstieg mit dem Tangentenwinkel 90° .



Damit liefert die analytische Berechnung den weiteren Vorteil, bei einer Kerbkontur mit einer angenäherten Ausrundung am Bauteil abzuschließen. Dieser Radius kann durch die analytische Methode auch direkt berechnet werden, weil der Radius dem Kehrwert des schon behandelten Krümmungsausdrucks $K(x)$ entspricht.

Krümmungsradien gegen Ende des Kurvenastes:

$$\left(\frac{y(x)}{y_0} \right) = \left[\frac{1}{\cos \varphi_0 \cdot (1 + \varphi_0')} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 + (y')^2}} + K(x) \right) \right] \quad \text{für } n = 1 \quad \varphi_0 = 0, \varphi_0' = 0$$

$$\left(\frac{y(x)}{y_0} \right) = \frac{1}{\sqrt{1 + (y')^2}} + K(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}} + K(x) = \cos \varphi + K(x)$$

$$\rightarrow \underline{\underline{K(x) = \left(\frac{y(x)}{y_0} \right) - \cos \varphi}}$$

$$y(x = 3,055) = 1,00 \quad \varphi(x = 3,055) = 45^\circ \quad (\pi/4 \text{ rad})$$

$$K(x = 3,055) = 1,29 \quad \rightarrow R(x = 3,055) = [K(x = 3,055)]^{-1} = \underline{\underline{0,77}}$$

$$y(x = 3,23) = 1,35 \quad \varphi(x = 3,23) = 90^\circ \quad (\pi/2 \text{ rad})$$

$$K(x = 3,23) = 2,7 \quad \rightarrow R(x = 3,23) = [K(x = 3,23)]^{-1} = \underline{\underline{0,37}}$$

Der Radius variiert am Auslauf (zwischen $\varphi = 45^\circ \dots 90^\circ$) von $R_{0,77}$ bis $R_{0,37}$, natürlich bezogen auf die normierten Werte für $y_0 = 0,5$ (= halber Durchmesser am Bauteil). Für den Fall $n=1$ liegt damit ein normierter Bauraum für die Kerbkontur vor. Der y-Wert bei der Tangentensteigung 45° hat bei der analytischen Methode immer den Wert $y_1=1,00$. Veränderte Startbedingungen mittels des Schrittwinkel $\Delta\varphi$ liefern stets einen sehr ähnlichen Kurvenverlauf, nur dass im flachen Anfangsbereich der Kurve diese in x-Richtung gestreckt/gestaucht wird. Man kann daher sagen, dass bei sinnvoll kleinen Schrittwinkeln $\Delta\varphi$ der gestalterische Kurvenverlauf in x-Richtung quasi nur verschoben ist.

Bauraumverhältnisse: $y_0 = 0,5$, $\varphi_0 = 0$ und $\varphi_1 = 45^\circ (= \pi/4 \text{ rad})$

Schrittwinkel $\Delta\varphi = 0,8^\circ$

$$n=1: \quad \left(\frac{y_1}{y_0} \right) = 2,00 \quad \text{Radius (bei } \varphi = 45^\circ) = 0,77$$

$$\left(\frac{y_{\max}}{y_0} \right) = 2,7 \quad \text{Radius (bei } \varphi = 90^\circ) = 0,37$$

Die Ermittlung der Bauraumverhältnisse für $n=2$ und $n=3$ können dann nach dem gleichen Schema erfolgen, wobei der Aufwand zur Bestimmung der Δx_i -Werte größer wird, weil die positive Lösung bei der Nullstellensuche aus einer Gleichung $(n+1)$ -ten Grades zu suchen ist. Für größere Schrittwinkel ($\Delta\varphi = 5^\circ$) wurden folgende Resultate gefunden.

Schrittwinkel $\Delta\varphi = 5^\circ$

$$n=2: \left(\frac{y_1}{y_0} \right) = 1,406 \quad \text{Radius (bei } \varphi = 45^\circ) = 0,788$$

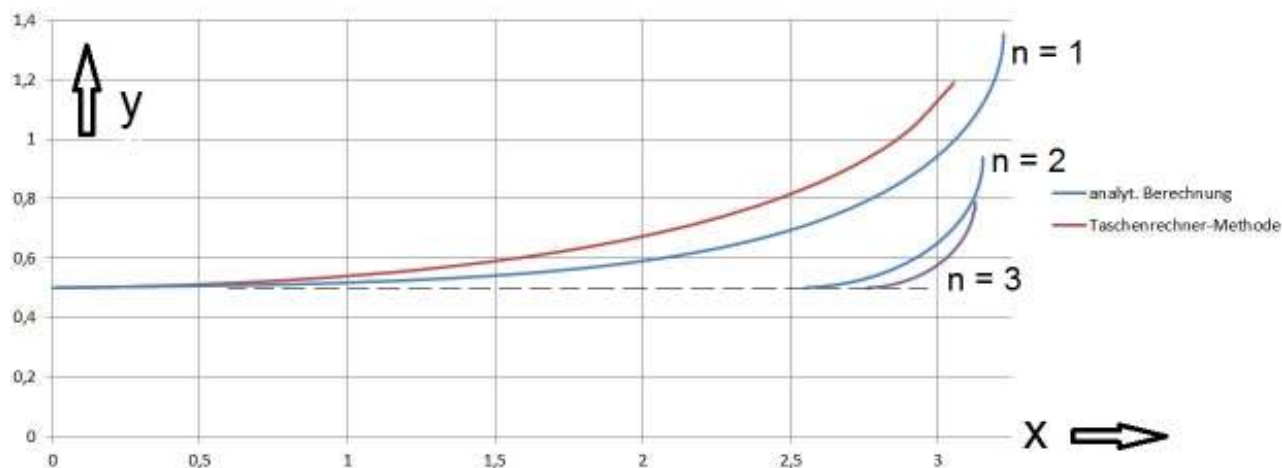
$$\left(\frac{y_{\max}}{y_0} \right) = 1,878 \quad \text{Radius (bei } \varphi = 90^\circ) = 0,284$$

Schrittwinkel $\Delta\varphi = 5^\circ$

$$n=3: \left(\frac{y_1}{y_0} \right) = 1,252 \quad \text{Radius (bei } \varphi = 45^\circ) = 0,797$$

$$\left(\frac{y_{\max}}{y_0} \right) = 1,522 \quad \text{Radius (bei } \varphi = 90^\circ) = 0,284$$

Im nachstehenden Diagramm sind die Kurven für $n=1\dots3$ gegenübergestellt, wobei die Kurven für $n=2$ und $n=3$ so in x -Richtung verschoben wurden, dass sie alle bei $x=3,055$ den Tangentenwinkel 45° besitzen. Wie zu erwarten war, verlaufen die Kurven mit steigendem n immer flacher, weil die entsprechenden Widerstandsmomente der belasteten Flächen quadratisch bzw. kubisch ansteigen, also die Zugspannungen schneller abgebaut werden. Gegen Ende der Kurve (rechts) erfolgt dagegen ein schnellerer Anstieg auf y_{\max} . Das Verhältnis y_0/y_{\max} sinkt mit steigendem n und verkleinert den benötigten Bauraum.



Hinsichtlich des Krümmungsradius und des Bauraumverhältnisses für den Kurvenpunkt mit der Tangentensteigung 45° kann daher vereinfacht geschrieben werden:

$$\left(\frac{y_1}{y_0} \right) \approx 2^{1/n} \quad R(45^\circ) \approx (2 - \cos 45^\circ)^{-1} = 0,77$$

Damit die Kurven in vereinfachter Weise nachgebildet werden können, sollen zu den verschiedenen Typen ($n=1\dots 3$) Polynomausdrücke angegeben werden, die maximal dem Grad 6 entsprechen. Da der Anstieg bei y_{\max} gegen unendlich läuft ($\tan(90^\circ)$), wird das Ausgleichspolynom nur im Kurvenfenster (x_A, y_A) bis (x_1, y_1) betrachtet. Danach kann ausgerundet werden mit $R(45^\circ) = 0,77$.

Polynomausdrücke: (beziehen sich alle auf den Durchmesser $y_0 = y_A = D_0/2 = 0,5$)

$$x_A = 0,5 \quad / \quad y_A = 0,5$$

$$x_1 = 3,055 \quad / \quad y_1 = 1,0$$

$$n=1: \quad y = 0,01174x^6 - 0,10284x^5 + 0,3569x^4 - 0,5883x^3 + 0,4705x^2 - 0,1284x + 0,50$$

$$x_A = 2,553 \quad / \quad y_A = 0,5$$

$$x_1 = 3,055 \quad / \quad y_1 = 0,703$$

$$n=2: \quad y = 2,3121x^4 - 24,9038x^3 + 101,1442x^2 - 183,3597x + 125,5549$$

$$x_A = 2,763 \quad / \quad y_A = 0,5$$

$$x_1 = 3,055 \quad / \quad y_1 = 0,626$$

$$n=3: \quad y = 9,3787x^4 - 106,4953x^3 + 454,5544x^2 - 864,1359x + 617,6960$$

Tabelle der Stützpunkte von den Kerbkonturkurven (für Spline-Anwendung):

(in dieser Tabelle ist die Ausrundung am Kurvenende inbegriffen)

n = 1		n = 2		n = 3	
y-Wert	x-Wert	y-Wert	x-Wert	y-Wert	x-Wert
0,5	0	0,5	2,553	0,5	2,763
0,578	1,903	0,521	2,715	0,511	2,847
0,644	2,307	0,563	2,848	0,535	2,922
0,709	2,547	0,616	2,950	0,567	2,985
0,780	2,732	0,673	3,026	0,605	3,035
0,907	2,952	0,703	3,055	0,626	3,055
0,994	3,054	0,732	3,080	0,646	3,073
1,047	3,101	0,761	3,100	0,667	3,087
1,097	3,139	0,789	3,116	0,688	3,099
1,145	3,168	0,817	3,129	0,709	3,109
1,198	3,192	0,844	3,139	0,729	3,116
1,247	3,208	0,870	3,146	0,749	3,122
1,294	3,218	0,895	3,151	0,768	3,125
1,327	3,222	0,920	3,152	0,787	3,126
1,353	3,223	0,939	3,153	0,761	3,127

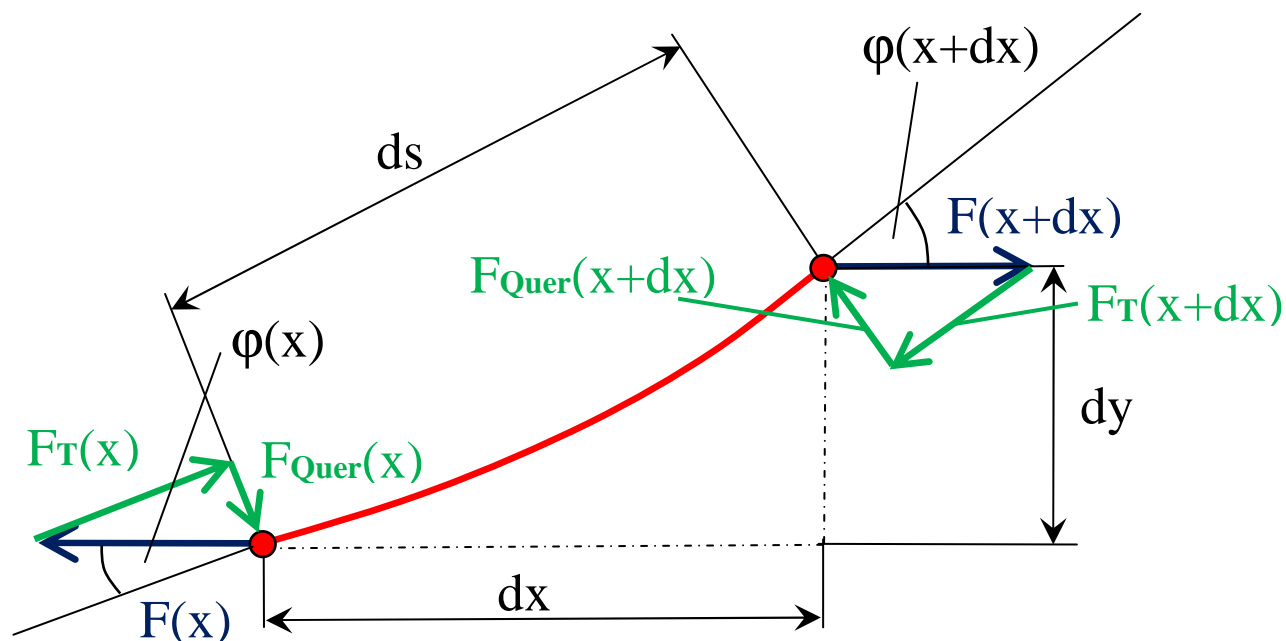
Die Zuordnung der verschiedenen Kurven erfolgt gemäß der Fallunterscheidung von Seite 9.

1.3 Ergänzung: Anwendung des Optimierungsansatzes bzgl. Querkraft F_{Quer} !!!

Genau wie im Abschnitt 1.2 wird nun die Herleitung einer Differentialgleichung erfolgen, die sich nun aber auf die Querkraft F_{Quer} bezieht. Da es einen Unterschied zwischen dem Begriff des „lokalen Querzugs“ und der „Querkraft“ gibt, wird das Ergebnis nicht mit dem aus 1.2 in Übereinstimmung stehen!

Die Frage ist daher, inwieweit die Ergebnisse voneinander abweichen bzw. wie der charakteristische Verlauf der Kurve in diesem Fall wäre.

Die Kräfte am Linienelement (rot):



Gleichgewichtsbedingungen:

$$F_{(x)} \cdot dy = F_{\text{Quer}(x)} \cdot ds \quad \rightarrow \quad F_{\text{Quer}(x)} = F_{(x)} \cdot \sin \varphi = F_{T(x)} \cdot \tan \varphi \quad \rightarrow \quad F_{T(x)} = F_{(x)} \cdot \cos \varphi$$

Optimierungsansatz:

$$dF_{\text{Quer}(x)} = -dF_{T(x)} \quad \rightarrow \quad \frac{dF_{\text{Quer}(x)}}{dx} = \frac{d}{dx} (F_{T(x)} \cdot \tan \varphi_{(x)}) = \frac{-dF_{T(x)}}{dx}$$

$$F_{(x)} = F_0 \cdot \left(\frac{y_0}{y(x)} \right)^n \quad F_{T(x)} = F_{(x)} \cdot \cos \varphi = F_0 \cdot \left(\frac{y_0}{y(x)} \right)^n \cdot \cos \varphi$$

Aufstellen der Differentialgleichung:

Zuerst werden die Differentialquotienten des Optimierungsansatzes als Ableitungen nach dx bestimmt.

$$\text{Ausgangsgleichung: } \frac{dF_{\text{Quer}(x)}}{dx} = \frac{d}{dx}(F_{T(x)} \cdot \tan \varphi_{(x)}) = \frac{d}{dx}(F_{(x)} \cdot \sin \varphi_{(x)}) = \frac{-dF_{T(x)}}{dx}$$

$$\text{mit } \frac{d}{dx}(\quad) = (\quad)'$$

(a)

$$\frac{d}{dx}(F_{(x)} \cdot \sin \varphi_{(x)}) = \frac{d}{dx}(F_{(x)}) \cdot \sin \varphi_{(x)} + \frac{d}{dx}(\sin \varphi_{(x)}) \cdot F_{(x)} = F_{(x)}' \cdot \sin \varphi_{(x)} + F_{(x)} \cdot \varphi_{(x)}' \cdot \cos \varphi_{(x)}$$

(b)

$$\frac{-dF_{T(x)}}{dx} = -\frac{d}{dx}(F_{(x)} \cdot \cos \varphi_{(x)}) = -F_{(x)}' \cdot \cos \varphi_{(x)} + F_{(x)} \cdot \sin \varphi_{(x)} \cdot \varphi_{(x)}'$$

Das Gleichsetzen von (a) und (b) ergibt dann:

$$\begin{aligned} F_{(x)}' \cdot \sin \varphi_{(x)} + F_{(x)} \cdot \varphi_{(x)}' \cdot \cos \varphi_{(x)} &= -F_{(x)}' \cdot \cos \varphi_{(x)} + F_{(x)} \cdot \sin \varphi_{(x)} \cdot \varphi_{(x)}' \\ \rightarrow F_{(x)}' \cdot (\sin \varphi_{(x)} + \cos \varphi_{(x)}) + F_{(x)} \cdot \varphi_{(x)}' \cdot (\cos \varphi_{(x)} - \sin \varphi_{(x)}) &= 0 \end{aligned}$$

Die Ableitung von F(x) wäre:

$$F_{(x)} = F_0 \cdot \left(\frac{y_0}{y(x)}\right)^n \rightarrow \frac{d}{dx}(F_{(x)}) = -F_0 \cdot n \cdot \left(\frac{y_0}{y(x)}\right)^n \cdot \frac{y(x)'}{y(x)} = -F_{(x)} \cdot \left(n \cdot \frac{y(x)'}{y(x)}\right)$$

$$\rightarrow -F_{(x)} \cdot \left(n \cdot \frac{y(x)'}{y(x)}\right) \cdot (\sin \varphi_{(x)} + \cos \varphi_{(x)}) + F_{(x)} \cdot \varphi_{(x)}' \cdot (\cos \varphi_{(x)} - \sin \varphi_{(x)}) = 0$$

An dieser Stelle kann nun die Zugkraft F(x) aus der Gleichung herausgekürzt werden.

$$\boxed{\rightarrow \varphi_{(x)}' \cdot (\cos \varphi_{(x)} - \sin \varphi_{(x)}) = \left(n \cdot \frac{y(x)'}{y(x)}\right) \cdot (\sin \varphi_{(x)} + \cos \varphi_{(x)})} \quad \text{DGL bzgl. } x, y, \varphi$$

Die jetzige Form der Differentialgleichung wird nun weiter umgeformt, um die Variablen trennen zu können.

$$\rightarrow \varphi_{(x)}' \cdot \frac{(\cos \varphi_{(x)} - \sin \varphi_{(x)})}{(\sin \varphi_{(x)} + \cos \varphi_{(x)})} = n \cdot \frac{y(x)'}{y(x)} \rightarrow d\varphi_{(x)} \cdot \frac{(\cos \varphi_{(x)} - \sin \varphi_{(x)})}{(\sin \varphi_{(x)} + \cos \varphi_{(x)})} = n \cdot \frac{1}{y(x)} \cdot dy(x)$$

$$\rightarrow \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{(\cos \varphi - \sin \varphi)}{(\sin \varphi + \cos \varphi)} \cdot d\varphi = \int_{y_0}^{y_1} n \cdot \frac{1}{y} \cdot dy$$

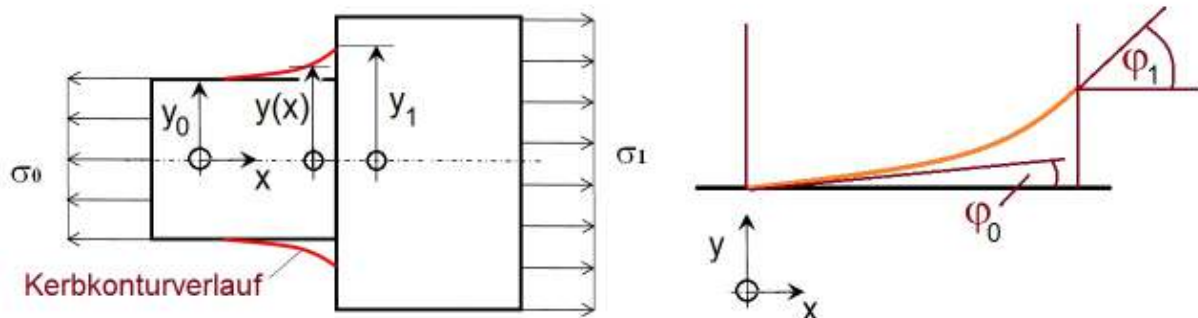
mit

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{(\cos \varphi - \sin \varphi)}{(\sin \varphi + \cos \varphi)} \cdot d\varphi = \ln \left(\frac{\sin \varphi_1 + \cos \varphi_1}{\sin \varphi_0 + \cos \varphi_0} \right) \quad \text{und} \quad \int_{y_0}^{y_1} n \cdot \frac{1}{y} \cdot dy = n \cdot \ln \left(\frac{y_1}{y_0} \right)$$

$$\rightarrow \ln \left(\frac{\sin \varphi_1 + \cos \varphi_1}{\sin \varphi_0 + \cos \varphi_0} \right) = n \cdot \ln \left(\frac{y_1}{y_0} \right) \rightarrow \frac{\sin \varphi_1 + \cos \varphi_1}{\sin \varphi_0 + \cos \varphi_0} = \left(\frac{y_1}{y_0} \right)^n$$

Jetzt sind wir soweit, dass über die Randbedingungen der Steigungswinkel (φ_0 , φ_1) von der Kurve die Bauteilabmessung y_1 berechnet werden kann. (siehe nachfolgende Skizze)

$$\boxed{\left(\frac{y_1}{y_0} \right)^n = \frac{\sin \varphi_1 + \cos \varphi_1}{\sin \varphi_0 + \cos \varphi_0}}$$



$y(x)$ = Radiuswerte bzgl. Achse

Setzt man die Werte $\varphi_0 = 0$ und $\varphi_1 = 45^\circ$ ein, dann liefert das Verhältnis y_1/y_0 diese Werte:

$$n=1: \left(\frac{y_1}{y_0} \right) = \sqrt{2} = 1,414 \quad n=2: \left(\frac{y_1}{y_0} \right) = \sqrt[4]{2} = 1,189 \quad n=3: \left(\frac{y_1}{y_0} \right) = \sqrt[6]{2} = 1,122$$

Die y-Abmessungen können somit in Abhängigkeit vom Winkel φ bestimmt werden. Was noch fehlt, wäre eine Abhängigkeit von der Variablen x zu finden, um die Kurve als eine $y(x)$ -Funktion im kartesischen Koordinatensystem zu erhalten.

$$y_{(\varphi(x))} = y_0 \cdot \left(\frac{\sin \varphi_{(x)} + \cos \varphi_{(x)}}{\sin \varphi_0 + \cos \varphi_0} \right)^{1/n}$$

Eine numerische Annäherung ist möglich, wenn für den Winkel $\varphi(x)$ schrittweise die dazugehörigen Weginkremente Δx berechnet werden, um das nachfolgende $\varphi(x+\Delta x)$ zu bestimmen usw. Auf diese Weise erhält man eine Kurve, deren Verlaufsgüte direkt von dem gewählten Winkelschritt $\Delta\varphi$ abhängt.

Die Frage stellt sich nun, wie man über die Variable φ zu der Variable x kommt. Ausgangspunkt ist hierbei die Tangentensteigung dy/dx , welche durch den Tangens von φ ausgedrückt wird.

$$\frac{dy}{dx} = \tan \varphi \quad \rightarrow \quad dx = \frac{dy}{\tan \varphi} \quad \text{bzw.} \quad \Delta x = \frac{\Delta y}{\tan \varphi} \quad \text{mit} \quad \Delta y = \left(\frac{dy}{d\varphi} \right) \cdot \Delta\varphi$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi} \left[y_0 \cdot \left(\frac{\sin \varphi + \cos \varphi}{\sin \varphi_0 + \cos \varphi_0} \right)^{1/n} \right] = y_0 \cdot \frac{1}{n} \left(\frac{\cos \varphi - \sin \varphi}{\sin \varphi_0 + \cos \varphi_0} \right) \cdot \left(\frac{\sin \varphi + \cos \varphi}{\sin \varphi_0 + \cos \varphi_0} \right)^{1/n} \cdot \left(\frac{\sin \varphi + \cos \varphi}{\sin \varphi_0 + \cos \varphi_0} \right)^{-1}$$

$$\rightarrow \quad \Delta x = y_0 \cdot \frac{1}{n} \left(\frac{\cos \varphi - \sin \varphi}{\sin \varphi_0 + \cos \varphi_0} \right) \cdot \left(\frac{\sin \varphi + \cos \varphi}{\sin \varphi_0 + \cos \varphi_0} \right)^{1/n} \cdot \Delta\varphi \cdot \frac{1}{\tan \varphi}$$

Diese Gleichung bietet die Möglichkeit, ab einem Startwinkel φ_0 und einem Startwert x_0 über den Schrittparameter $\Delta\varphi$ die Weginkremente Δx zu berechnen. Dabei muss $\varphi_0 \neq 0$ sein, weil sich sonst die Lösungskurve aus dem Unendlichen her dem Wert y_0 asymptotisch nähern würde.

$$\Delta x_{i+1} = y_0 \cdot \frac{1}{n} \left(\frac{\cos \varphi_i - \sin \varphi_i}{\sin \varphi_i + \cos \varphi_i} \right) \cdot \left(\frac{\sin \varphi_i + \cos \varphi_i}{\sin \varphi_0 + \cos \varphi_0} \right)^{1/n} \cdot \Delta\varphi_{i+1} \cdot \frac{1}{\tan \varphi_i}$$

$$\varphi_i = \varphi_0 + \sum_{k=1}^i \Delta\varphi_k$$

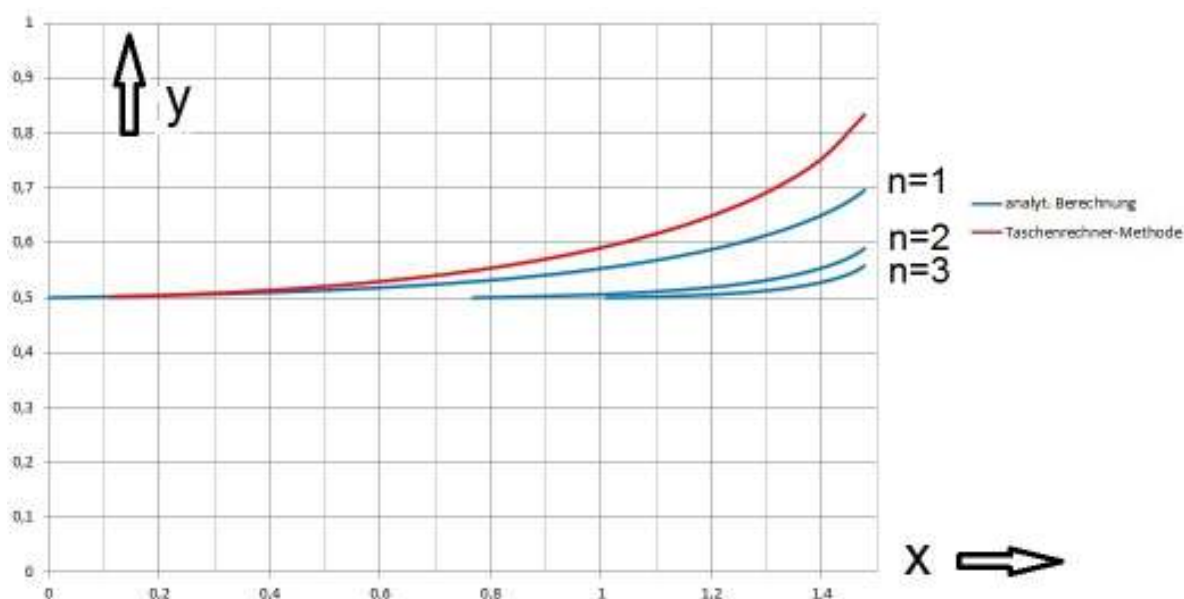
$$0 < \varphi_0 \leq 45^\circ$$

$$x_i = x_0 + \sum_{k=1}^i \Delta x_k$$

An der Gleichung für Δx_{i+1} erkennt man, dass sobald sich der Winkel φ_i dem Bereich von 45° nähert, die Inkremente Δx_i und Δy_i immer kleiner werden und gänzlich gegen Null schrumpfen. D.h., gegen Ende des Kurvenverlaufs werden die hinzukommenden Linienstücke immer kürzer, sodass ein starker Krümmungsverlauf erst in diesem Kurvenbereich erfolgt, weil ja die Winkeländerung $\Delta\varphi_i$ weiterhin fortläuft und nicht gegen Null läuft!

Im nachstehenden Diagramm sind wieder die Kurven für $n=1\dots 3$ gegenübergestellt, wobei die Kurven für $n=2$ und $n=3$ so in x -Richtung verschoben wurden, dass sie alle bei $x=1,477$ den Tangentenwinkel 45° besitzen. Die Kurven laufen mit steigendem n immer flacher. Gegen Ende der Kurve (rechts) erfolgt ein sehr schneller Anstieg auf y_1 . Das ist der wesentliche Unterschied zum korrekteren Kurvenverlauf, der in 1.2 abgeleitet wurde. Die Kurven sind hier viel zu flach auf einer sehr langen Strecke entlang der x -Achse, um sich dann schließlich im Endbereich der Kurve sehr schnell auf einen Tangentenwinkel von 45° zu krümmen.

Auch wenn die Kurven (blau) auf dem ersten Blick eine passable Kerbkontur vorgeben könnten, so sind sie das Ergebnis eines fälschlich interpretierten Ansatzes und deswegen zu verwerfen! Das Beispiel soll zeigen, dass es sehr wichtig ist, zwischen den Begriffen „Querkraft“ und „lokalen Querkzug“ zu unterscheiden!



DIESE KURVENVERLÄUFE (BLAU) SIND DAHER NICHT ZU VERWENDEN!!!

2. Bionik-Design: Das Zugdreieck als Universalform

2.1 Die Zugdreieck-Methode:

[2], [3]

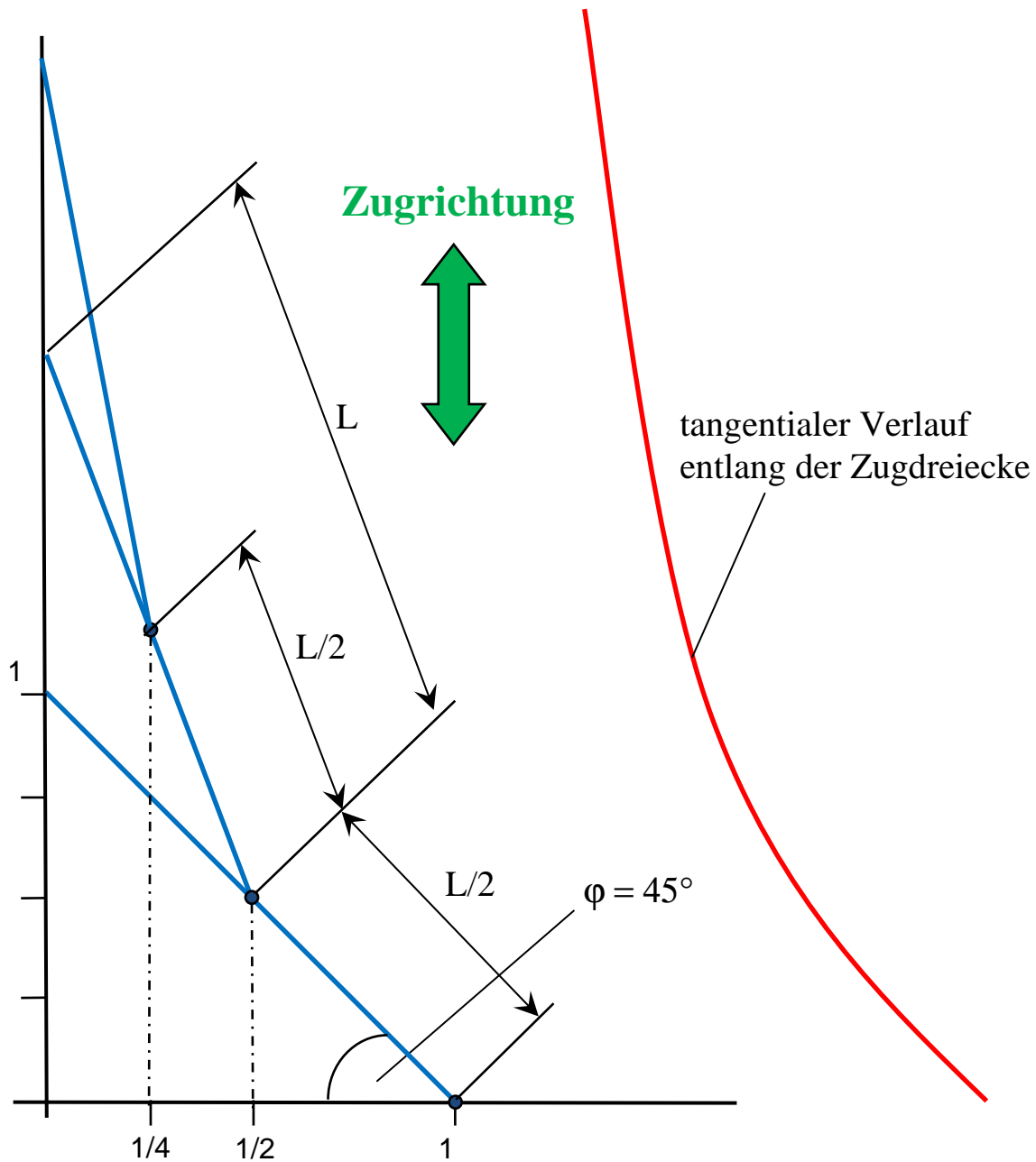
In den beiden Büchern von Claus Mattheck [2] und [3] sind viele Beispiele illustriert, wo in der Natur bevorzugte Formen anzutreffen sind, die dem „Axiom der konstanten Spannung“ gehorchen. Dazu gehören die Wurzelanläufe von Bäumen, Knochenausrundungen (Femur), die Gabeln am Hirschgeweih, Erosionsformen an Felsen, Bärenkrallen, Haifischzähne etc... . Eine einfache Methode, um mit geringem Aufwand zu einer Form zu gelangen, wie sie als Kerbkonturverlauf dienen kann, ist die Anwendung von Zugdreiecken.

Bei dieser Methode startet man mit einem 45° -Winkel, welchen man zur Entschärfung in den scharfkantigen Kerbübergang (z.B. 90° -Schulter) legt. Es entsteht damit eine Kerbentschärfung mit einem 45° -Winkel. Auf der Mitte der Langseite (Hypotenuse) wird dann das nächste Dreieck gesetzt, um den bisher entschärften Übergang wieder weiter zu entschärfen, wobei immer derselbe Betrag der Langseite übertragen wird. Das Spielchen wird weiter wiederholt, wobei nach 3...4 Schritten schon sehr gute Ergebnisse erzielt werden können, weil mit jedem weiteren Schritt die Winkeldifferenzen sich quasi halbieren, sich also der Verlauf exponentiell glättet.

Beispiel: Wurzelanlauf bei einem Baum



Beispiel zur Konstruktion eines Zugdreiecks:

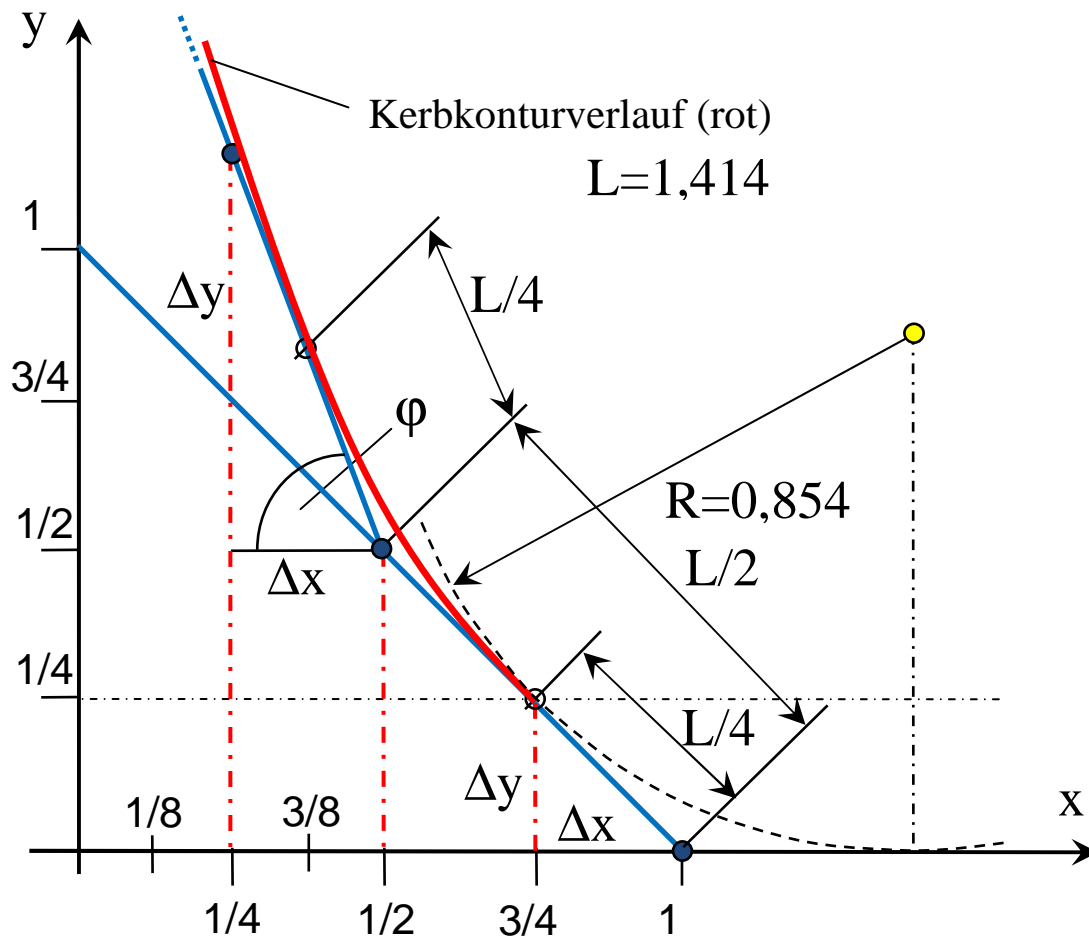


Legt man entlang der Zugdreiecke eine Kurve (rot), welche die Langseiten tangiert, dann ergibt sich eine speziell für die vertikale Lastrichtung optimierte Kerbkontur. Dieser Verlauf wurde auch per CAO-Methode berechnet und in guter Übereinstimmung bestätigt.

Für die folgende analytische Betrachtung soll bezüglich des ersten 45° -Dreiecks eine Normierung stattfinden. Dabei sollen die beiden Katheten die Länge = 1 besitzen, d.h., die zu übertragenden Langseiten hätten die Länge $L = 1,414$.

2.2 Analytische Betrachtung des Kurvenverkaufs:

Anhand der nachstehenden Skizze wird gezeigt, in welcher Weise eine Hüllkurve in die Konstruktion der Zugdreiecke gesetzt werden kann. Dabei sollen die Tangentenpunkte stets im ersten Viertel der Langseiten platziert werden. Im ersten Tangentenpunkt ($x=3/4$ und $y=1/4$) ist der Tangentenwinkel 45° . Von dort ausgehend kann mit einem Radius 0,854 ausgerundet werden, sodass dieser tangential auf der x-Achse ausläuft (bei $y=0$). Der Radius-Wert gilt natürlich nur für den normierten Fall und muss bei anderen Abmessungen entsprechend skaliert werden.



Berechnung des Kurvenverlaufs (rote Hüllkurve):

Für die Zugdreieck-Methode (Einzelschritte!) gilt:

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{2^t} \quad \text{mit ganzzahligem } t \quad t \geq 0 \quad ; \quad 0 < x \leq 1$$

Das erste 45° -Dreieck wird dabei mit $t_0 = 0$ gestartet. Der Ausdruck $\tilde{x}(t)$ liefert dann die nachfolgenden x-Werte für die Zugdreiecke, von wo aus die Norm-Länge ($L=1,414$) übertragen werden sollen. Es erfolgt also immer eine Halbierung der x-Werte.

Für die Tangentenpunkte (wichtig für die analytische Kurve) gilt dann:

$$x(t) = \tilde{x}(t) \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2^t} \cdot \frac{3}{4} \quad \text{mit ganzzahligem } t \quad t \geq 0 \quad ; \quad 0 < x \leq 1$$

Die Tangentensteigungen der einzelnen Dreiecke ergeben sich dann wie folgt:

$$\frac{\Delta x_t}{\Delta y_t} = \tan \varphi_t \quad \text{bzw.} \quad \cos \varphi_t = \frac{\tilde{x}_t}{L} = \frac{1}{2^t} \cdot \frac{1}{L}$$

$$\tan \varphi_t = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi_t}}{\cos \varphi_t} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \varphi_t} - 1} = \frac{\Delta x_t}{\Delta y_t}$$

Die Beschreibung der Tangentensteigung wird nun auf die kontinuierliche Kurve projiziert, wobei man nun darauf achten muss, dass die Tangentensteigung bei $x(t)$ diejenige von $\tilde{x}(t)$ ist! Da die Funktion $y(x)$ mit steigendem x abfällt, ist die erste Ableitung dy/dx negativ.

$$\frac{dy}{dx} = y'(x) = -\tan \varphi(\tilde{x}) = -\sqrt{\frac{1}{\cos^2 \varphi_t} - 1} = -\sqrt{\left(\frac{L}{\tilde{x}}\right)^2 - 1} = -\sqrt{\left(\frac{L}{x}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 - 1}$$

$$y(x) = -\int_{x_0=3/4}^x \sqrt{\left(\frac{L}{x}\right)^2 \cdot \frac{9}{16} - 1} \cdot dx = -\int_{x_0=3/4}^x \frac{1}{x} \cdot \sqrt{\left(L \cdot \frac{3}{4}\right)^2 - x^2} \cdot dx$$

$$y(x) = -x \cdot \sqrt{\left(\frac{L}{x}\right)^2 \cdot \frac{9}{16} - 1} + \frac{3}{4} \cdot L \cdot \ln \left[\frac{3}{4} \cdot \frac{L}{x} + \sqrt{\left(\frac{L}{x}\right)^2 \cdot \frac{9}{16} - 1} \right] \Bigg|_{x_0=3/4}^x$$

$$y(x_0 = 3/4) = -\frac{3}{4} \cdot \sqrt{\left(\frac{L}{3/4}\right)^2 \cdot \frac{9}{16} - 1} + \frac{3}{4} \cdot L \cdot \ln \left[\frac{3}{4} \cdot \frac{L}{3/4} + \sqrt{\left(\frac{L}{3/4}\right)^2 \cdot \frac{9}{16} - 1} \right]$$

$$y(x_0 = 3/4) = -\frac{3}{4} \cdot \sqrt{L^2 - 1} + \frac{3}{4} \cdot L \cdot \ln \left[L + \sqrt{L^2 - 1} \right] \quad \text{mit} \quad L = \sqrt{2}$$

$$\rightarrow y(x_0 = 3/4) = 0,1848$$

$$y(x) = -x \cdot \sqrt{\left(\frac{L}{x}\right)^2 \cdot \frac{9}{16} - 1} + \frac{3}{4} \cdot L \cdot \ln \left[\frac{3}{4} \cdot \frac{L}{x} + \sqrt{\left(\frac{L}{x}\right)^2 \cdot \frac{9}{16} - 1} \right] - 0,1848$$

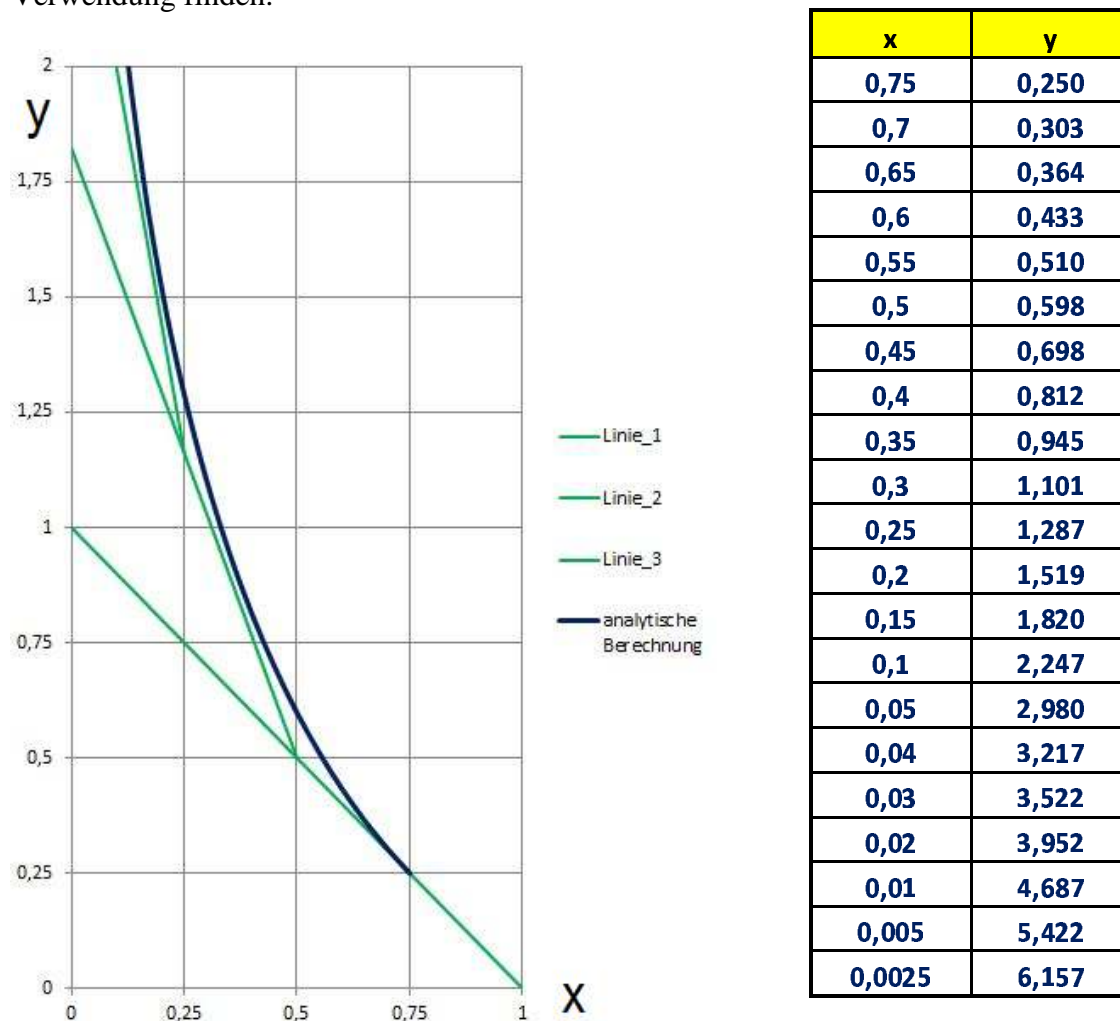
Um mit der Skizze in Übereinstimmung zu kommen, sollte bei $x = 3/4$ der zugeordnete Funktionswert $y = 1/4$ sein. Da $y(x=3/4) = 0$ ist, führen wir eine Verschiebung um $1/4$ ein und bezeichnen den Funktionswert nun als $\tilde{y}(x)$.

$$\tilde{y}(x) = y(x) + \frac{1}{4}$$

$$\rightarrow \tilde{y}(x) = -x \cdot \sqrt{\left(\frac{L}{x}\right)^2 \cdot \frac{9}{16} - 1} + \frac{3}{4} \cdot L \cdot \ln \left[\frac{3}{4} \cdot \frac{L}{x} + \sqrt{\left(\frac{L}{x}\right)^2 \cdot \frac{9}{16} - 1} \right] + 0,0652$$

Das ist die hergeleitete Kurve für die Zugdreiecke gemäß den Annahmen laut Skizze.

In einem Diagramm aufgetragen ergibt sich eine Kurve, die sehr gut an einer gewünschten Hüllkurve herankommt. Die grünen Linien 1...3 sind dabei die Langseiten aus der Zugdreieck-Methode und bei der blauen Kurve handelt es sich um die berechneten Werte von $\tilde{y}(x)$. Insofern kann der gewählte Ansatz zur Berechnung von $\tilde{y}(x)$ als Näherungslösung Verwendung finden.



Um eine Spline-Anwendung auf die Stützpunkte legen zu können, sind hier die entsprechenden Werte in tabellarischer Form auch mit angegeben.

2.3 Der Tangens als Näherung:

Wenn man sich den Verlauf der Kurve aus der Zugdreieck-Methode näher anschaut, dann ist zu erkennen, dass die Tangensfunktion „tan(x)“ eine sehr ähnliche Charakteristik aufweist. Im Ursprung liegt eine sehr prägnante 45°-Steigung vor, die im Weiteren immer mehr zunimmt und bei $x=\pi/2$ eine Polstelle besitzt. Auf eine Tangensfunktion basierend können nun Transformationen durchgeführt werden, um sie für unser normiertes Beispiel zu verwenden.

1. Funktion spiegeln um y-Achse: $y(x) \Rightarrow -y(x)$
2. Funktion um $+\Delta x$ verschieben in x-Achse: $y(x) \Rightarrow y(x - \Delta x)$
3. Funktionsgraph skalieren um Faktor k: $y(x) \Rightarrow k \cdot y\left(\frac{x}{k}\right)$

Bezogen auf die Tangensfunktion sind jetzt die Schritte 1...3 durchzuführen:

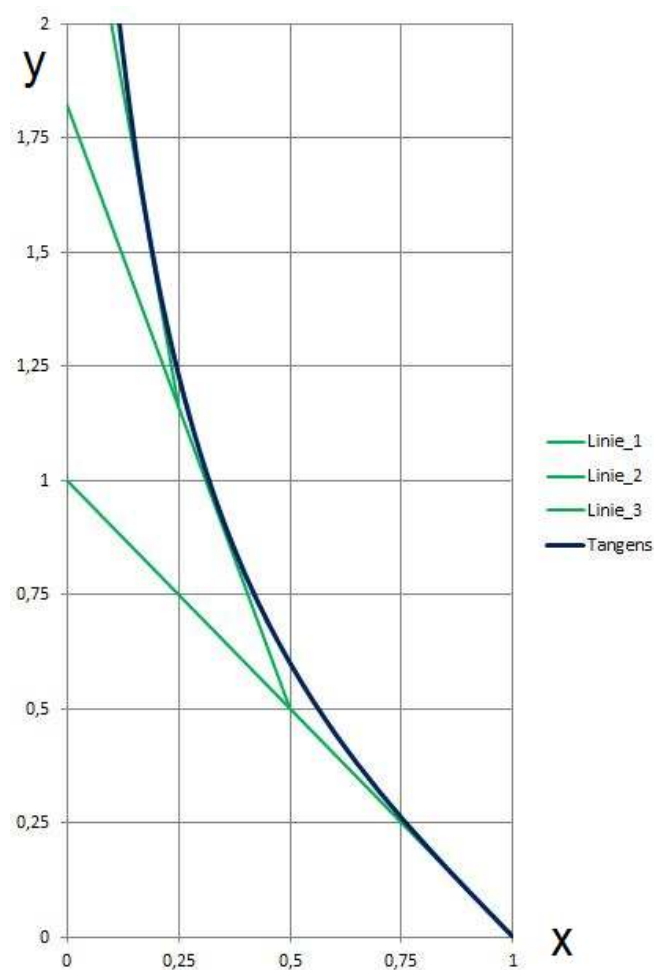
Schritt 1 – Spiegelung um y-Achse: $y(x) = -\tan(x)$

Schritt 2 – Verschiebung um $\Delta x = 1$: $y(x) = -\tan(x - 1)$

Schritt 3 – Skalierung: $y(x) = -k \cdot \tan\left(\frac{x-1}{k}\right)$

Wird für den Faktor der Wert $k=0,72$ eingesetzt, dann ergibt sich ein Verlauf wie im folgenden Diagramm, der schon ziemlich vorbildlich ist:

$$y(x) = -0,72 \cdot \tan\left(\frac{x-1}{0,72}\right)$$



x	y
1	0,000
0,95	0,050
0,9	0,101
0,85	0,152
0,8	0,205
0,75	0,261
0,7	0,319
0,65	0,380
0,6	0,447
0,55	0,519
0,5	0,600
0,45	0,690
0,4	0,793
0,35	0,913
0,3	1,056
0,25	1,231
0,2	1,454
0,15	1,750
0,1	2,167
0,05	2,804
0,01	3,630

2.4 Die Verfolgungskurven Traktrix und Radiodrome:

Zu der Familie der „Verfolgungskurven“ gehören spezielle Kurven wie die Radiodrome (Leitstrahlkurve), Traktrix (Schleppkurve) und die Konchoide (Muschelkurve). Sie alle haben die Gemeinsamkeit, dass die Kurven die Bewegung eines Punktes P beschreiben, der einen zweiten Punkt A kontinuierlich in direkter Linie verfolgt.

Definition Traktrix:

Zwischen dem Punkt A (ziehend) und dem Punkt P (schleppend bzw. verfolgend) ist stets der gleiche Abstand $b = \text{const.}$ gegeben. Der Punkt A, der von P verfolgt wird, bewegt sich dabei auf einer Geraden.

Bewegt sich der Punkt A entlang der y-Achse, ausgehend vom Startpunkt im Ursprung (0,0), und befindet sich der verfolgende Punkt P beim Start auf der x-Achse (b,0), dann wird die Traktrix mit der folgenden Funktion beschrieben:

$$y(x) = \mp \sqrt{b^2 - x^2} \pm b \cdot \ln \left| \frac{b + \sqrt{b^2 - x^2}}{x} \right| \quad A_0 : (0,0) \quad P_0 : (b,0)$$

Definition einer „geraden“ Radiodrome:

Zwischen dem Punkt A und dem Punkt P (verfolgend) ist in diesem Fall kein konstanter Abstand vorgegeben, es besteht also keine starre Bindung. Der Punkt A, der von P verfolgt wird, bewegt sich dabei wieder auf einer Geraden und mit einer konstanten Geschwindigkeit v_A . Der Punkt P verfolgt (von einem Startpunkt ausgehend) den Punkt A kontinuierlich in direkter Linie mit einer konstanten Geschwindigkeit v_P .

Bewegt sich der Punkt A entlang der y-Achse, ausgehend vom Startpunkt im Ursprung (0,0), und befindet sich der verfolgende Punkt P beim Start auf der x-Achse (b,0), dann wird die Radiodrome mit der folgenden Funktion beschrieben, wobei die beiden Punkte dieselbe Geschwindigkeit $v_P = v_A$ besitzen müssen und $b=1$ ist:

$$y(x) = \frac{1}{4} \cdot (x^2 - \ln(x^2) - 1) \quad \text{für} \quad \frac{v_A}{v_P} = m = 1 \quad A_0 : (0,0) \quad P_0 : (1,0)$$

... oder allgemeiner, wenn die Geschwindigkeiten ungleich sind:

$$y(x) = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1 - x^{1-m}}{1-m} - \frac{1 - x^{1+m}}{1+m} \right] \quad \text{für} \quad \frac{v_A}{v_P} = m \neq 1 \quad A_0 : (0,0) \quad P_0 : (1,0)$$

Behandlung der Traktrix:

Bei der Betrachtung der Funktion für die Traktrix fällt auf, dass diese im Rahmen des Abschnitts 2.2 eigentlich schon mit $\tilde{y}(x)$ hergeleitet wurde. Wenn nämlich für b die spezielle Länge $\frac{3}{4} L$ eingesetzt wird, dann liest sich die Funktion der Traktrix folgendermaßen:

$$y(x) = \mp \sqrt{\left(\frac{3}{4} \cdot L\right)^2 - x^2} \pm \frac{3}{4} \cdot L \cdot \ln \left[\frac{3}{4} \cdot \frac{L}{x} + \frac{1}{x} \cdot \sqrt{\left(\frac{3}{4} \cdot L\right)^2 - x^2} \right]$$

Bis auf die y-Verschiebung von +0,0652 ist diese Form absolut identisch mit der Gleichung von Seite 26. Damit wäre sie also schon behandelt worden. Eine weitere sehr interessante Behandlung der Gleichung erfolgt dann auf Seite 37.

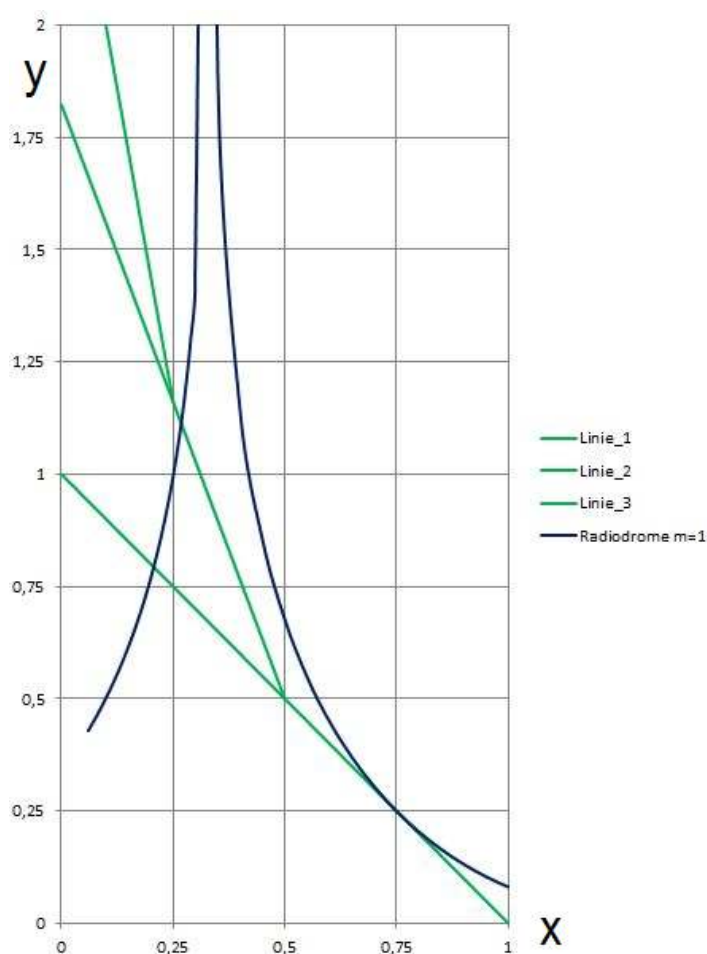
Behandlung der geraden Radiodrome:

Der wesentliche Unterschied zur Traktrix besteht darin, dass zwischen den Punkten A und P keine feste Bindung besteht und sich die beiden Punkte mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten bewegen können, also das Verhältnis $m \neq 1$ sein kann.

Radiodrome mit $m=1$:

Um einen Vergleich mit den Kurvenzug der Zugdreiecke herstellen zu können, wird die Funktion der Radiodrome in x- und y-Richtung verschoben, sodass folgende Gleichung entsteht:

$$y(x) = \frac{1}{4} \cdot \left((x - 0,3358)^2 - \ln((x - 0,3358)^2 - 1) \right) + 0,016$$

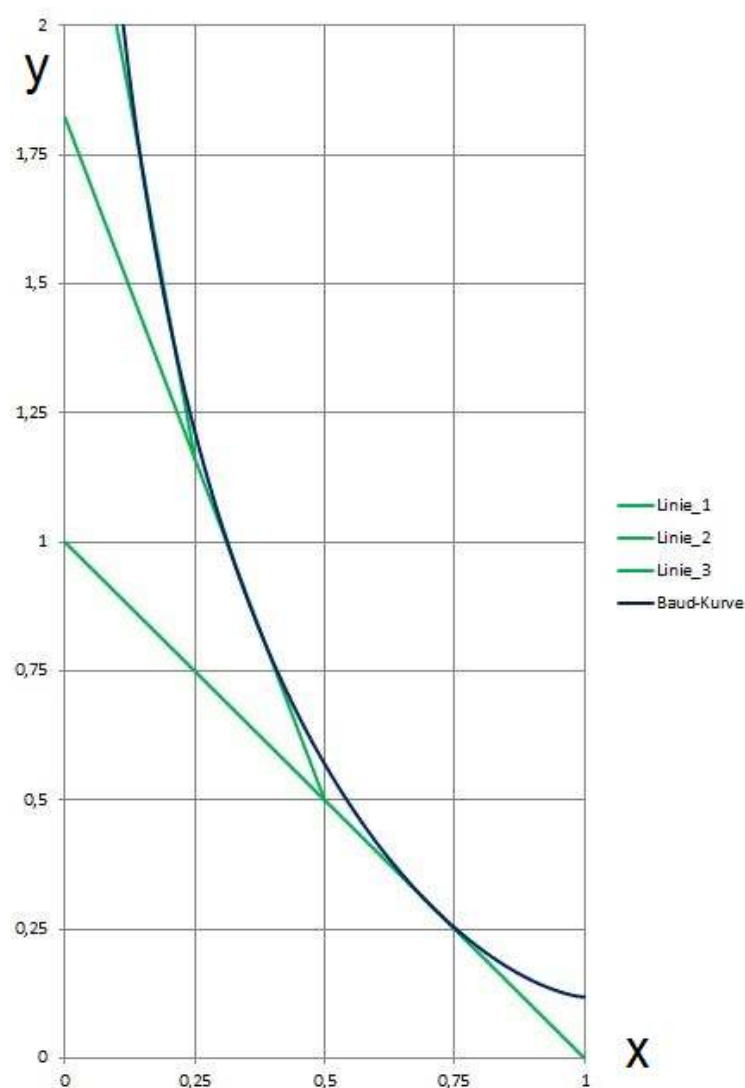


An dem Kurvenverlauf ist sofort zu erkennen, dass er sich als Näherung nicht eignet, da er einen zu hohen Anstieg besitzt und zudem bei $x=0,3358$ eine Polstelle vorliegt. Eine Verbesserung durch die Variation des Verhältnisses $m \neq 1$ kann ebenfalls nicht erzielt werden, sodass die Verwendung einer geeigneten Traktrix in diesem Fall zu favorisieren ist.

Legt man den Koordinaten-Ursprung in die Ecke der Bauteilkerbe, dann kann die Baud-Kurve (durch entsprechende Anpassungen) sehr präzise der Kontur der Zugdreiecke angeglichen werden.

Es sei: $\frac{2 \cdot b}{\pi} = (x_{\max} - x_0) = 1$ und eine y-Verschiebung von: $\Delta y = 0,1187$

$$x(\theta) = 1 - 2 \cdot \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad y(\theta) = 1 \cdot \left[\ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)\right) - \sin(\theta) \right] + 0,119 \quad \text{Fall: } n = 1$$



Theta (Grad)	x	y
0	1,000	0,119
10,000	0,985	0,121
20,000	0,940	0,133
30,000	0,866	0,168
40,000	0,766	0,239
45,000	0,707	0,293
50,000	0,643	0,363
55,000	0,574	0,454
60,000	0,500	0,570
65,000	0,423	0,719
70,000	0,342	0,915
72,500	0,301	1,036
75,000	0,259	1,181
77,500	0,216	1,354
80,000	0,174	1,570
82,500	0,131	1,852
85,000	0,087	2,254
86,000	0,070	2,476
87,000	0,052	2,763
88,000	0,035	3,168
89,000	0,017	3,860
89,500	0,009	4,553
89,600	0,007	4,777
89,700	0,005	5,064
89,800	0,003	5,470
89,900	0,002	6,163
89,925	0,001	6,450
89,950	0,001	6,856
89,960	0,001	7,079
89,970	0,001	7,367
89,980	0,0003	7,772
89,990	0,0002	8,465
90,000	0,0000	36,450

Durchmesser (nach Baud) für diesen Fall ist:

$$D_0 = 2 \cdot b = \pi \cdot (x_{\max} - x_0)$$

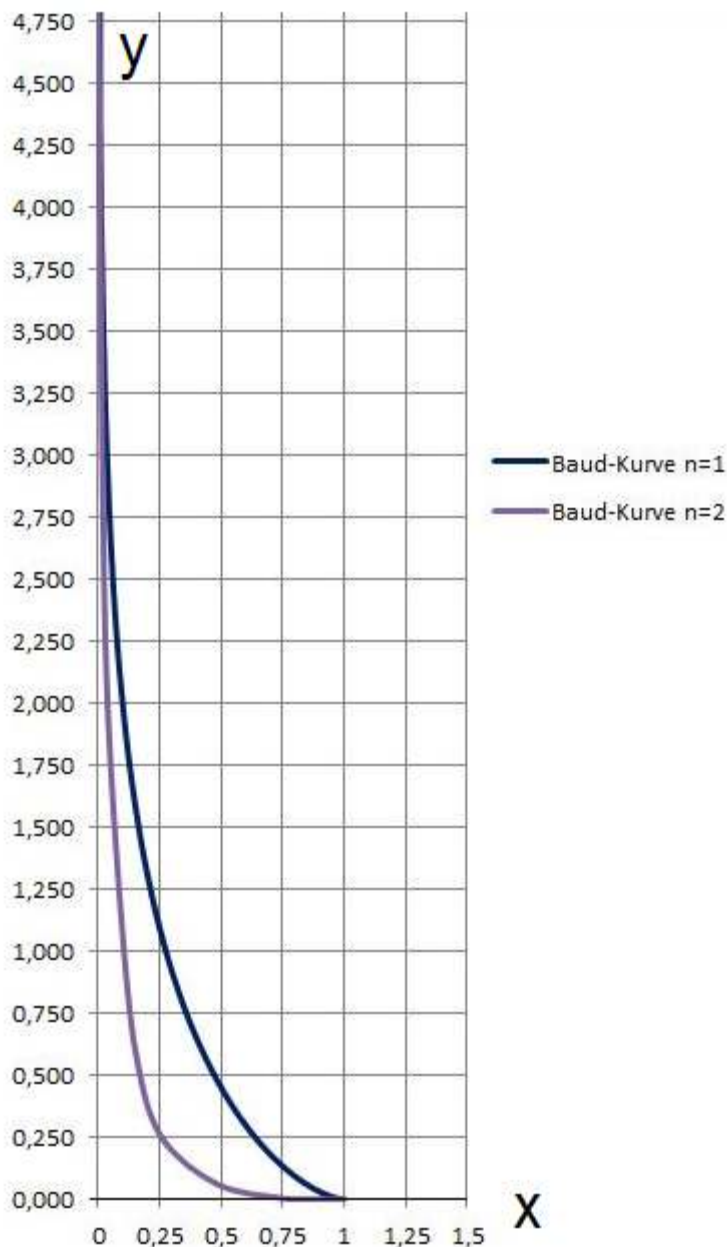
Wie sich hier zeigt, stellt die Baud-Kurve eine hervorragende Hüllkurve für die Zugdreiecke dar. Hierin dokumentiert sich damit auch, dass die Methode der Zugdreiecke sich als geeignet herausstellt, um eine reine 2D-Zugbelastung in Achsrichtung zu betrachten (Fall: n=1).

In der Promotionsarbeit von Baud [4] wird auch auf den Fall $n=2$ eingegangen (empirische Untersuchung), also die Biegung eines prismatischen Bauteils mit variabler Dicke (Widerstandsmoment ändert sich quadratisch). Genau wie in Abschnitt 1.2 beschrieben ist auch hier die Aussage, dass die Kerbkontur in diesem Fall im Anfangsteil viel flacher ist und erst zum Ende der Kontur hin (in der „ausgerundeten“ Ecke) ein schnellerer Anstieg zu verzeichnen ist.

Es gilt wieder:

$$\frac{2 \cdot b}{\pi} = (x_{\max} - x_0) = 1$$

Werte für $n = 2$



x	y
1,000	0,000
0,876	0,001
0,748	0,005
0,487	0,060
0,265	0,240
0,168	0,513
0,106	0,993
0,040	1,985
0,018	3,012
0,009	4,005
0,000	4,964

Da in der Abhandlung von Baud für den Fall $n=2$ nur empirische Werte ermittelt wurden, - das Bauteil wurde so bearbeitet, dass es spannungsoptisch ein Optimum bzgl. der Spannungskonstanz zeigte -, kann an dieser Stelle keine Gleichung angegeben werden.

So heißt es in [4]: ... „Daraus geht hervor, dass die beiden Profile einander nicht ähnlich sind, und daher der analytische Ausdruck für den Biegungsfall erst noch gefunden werden muss“. ... „Da nun in diesem Belastungsfall die Randspannung quadratisch statt linear von der jeweiligen Querdimension abhängt, ist es zu verstehen, dass sich bei Biegung die Grenzkurve enger an die Asymptoten anschmiegt als bei Zug“.

Um jetzt auch einen Vergleich mit den hergeleiteten Kurven aus Abschnitt 1.2 zu erhalten, müssen wir bei dem Beispiel „Baud-Kurven“ kurz einmal die x- und y-Achse gedanklich vertauschen, damit die Bauraumverhältnisse in gleicher Weise berechnet werden können.

In 1.2 galt:
$$\lambda_{\max} = \left(\frac{y_{\max}}{y_0} \right)$$

n=1: $\lambda_{\max} = 2,70$

n=2: $\lambda_{\max} = 1,878$

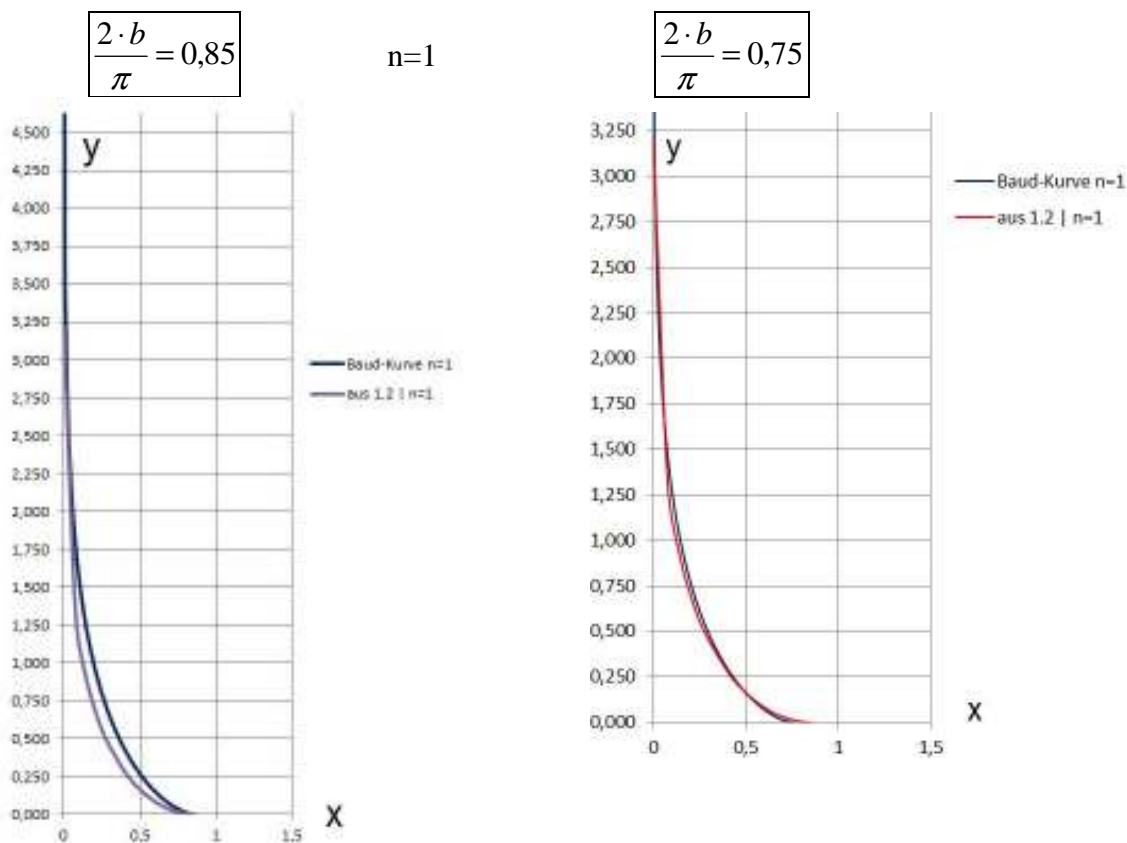
n=3: $\lambda_{\max} = 1,522$

In 2.5 gilt bisher:
$$\lambda_{\max} = \left(\frac{x_{\max}}{x_0} \right) = \left(\frac{D_0/2 + 2 \cdot b/\pi}{D_0/2} \right) = 1 + \frac{4 \cdot b}{D_0 \cdot \pi} = 1 + \frac{1}{\pi}$$

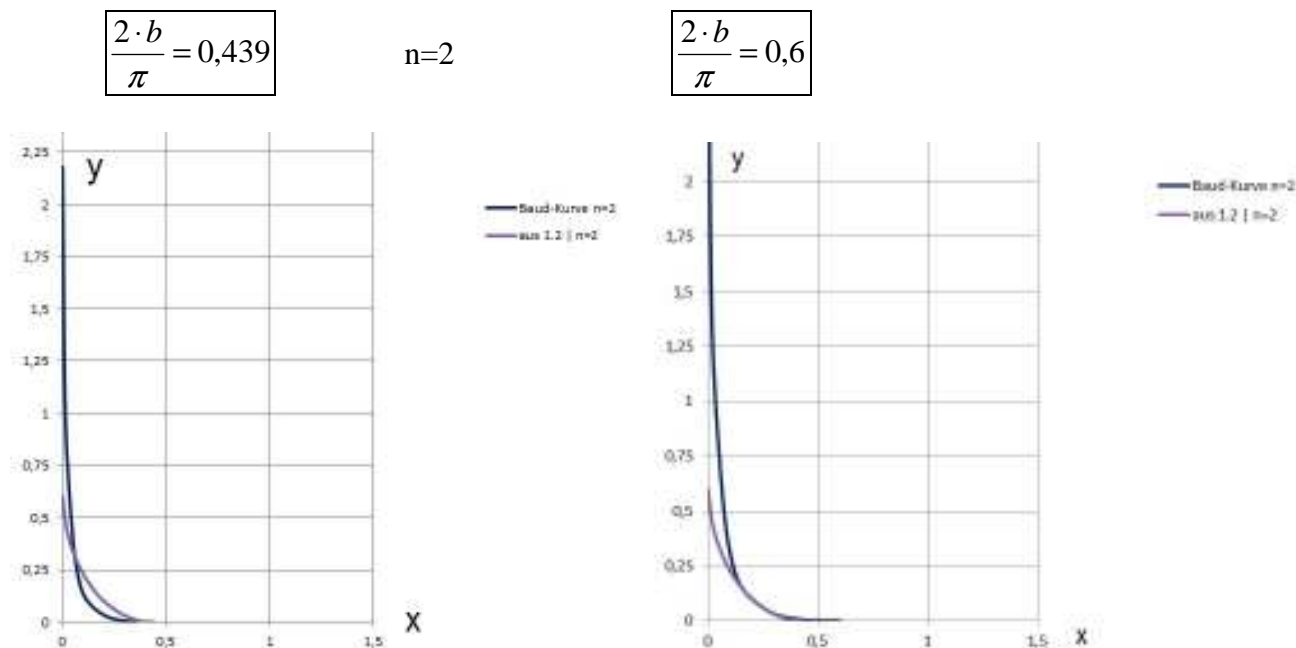
D.h., damit im ersten Schritt annähernd vergleichbare Bauraumverhältnisse für die Baud-Kurven vorliegen, müssen die Werte für $2 \cdot b/\pi$ folgende Werte annehmen:

n=1:
$$\frac{2 \cdot b}{\pi} = \left(\frac{\lambda_{\max} - 1}{2} \right) = 0,85$$

n=2:
$$\frac{2 \cdot b}{\pi} = \left(\frac{\lambda_{\max} - 1}{2} \right) = 0,439$$



Beim Fall $n=1$ ist zu erkennen, dass die Baud-Kurve im Anfangsteil einen weniger steilen Anstieg besitzt. Skaliert man auf den Wert $2 \cdot b / \pi = 0,75$, dann sind die beiden Kurven zueinander gut ausgemittelt und haben einen Schnittpunkt ungefähr im Bereich der 45° -Tangente.



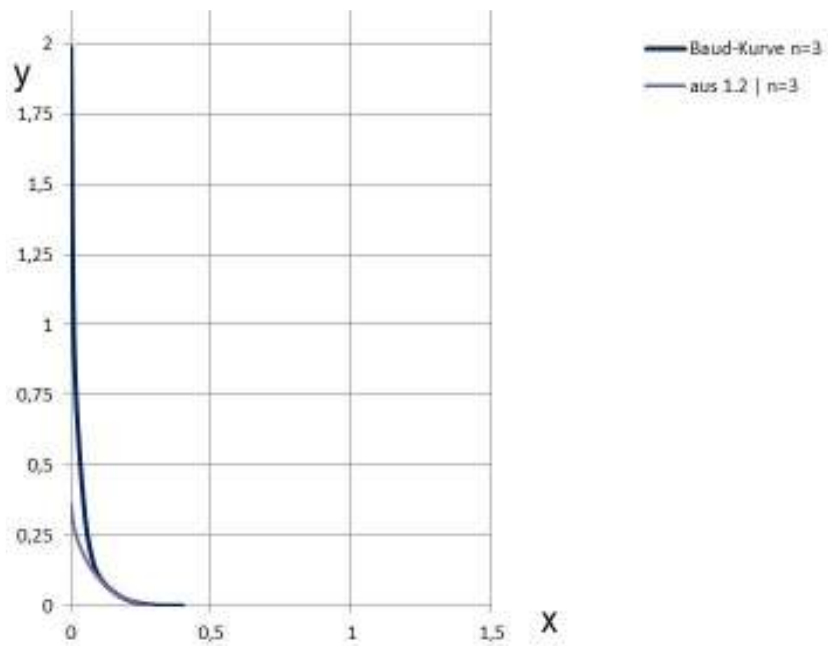
Beim Fall $n=2$ sieht es etwas anders aus, weil die Baud-Kurve im Anfangsteil jetzt einen steileren Anstieg besitzt. Skaliert man ausgleichend auf den Wert $2 \cdot b / \pi = 0,6$, dann sind die beiden Kurven zueinander nur im auslaufenden Kurventeile (Eckbereich des Bauteils) in Übereinstimmung zu bringen.

Für den Fall $n=3$ gibt es keine Möglichkeit eines Vergleichs, weil die empirischen Untersuchungen in [4] nicht auf Fälle ausgeweitet wurden, deren Widerstandsmomente sich kubisch mit der Querdimension des Bauteils ändern.

Wenn man davon ausgeht, dass der Formverlauf bei $n=2$ und $n=3$ im Bereich der Bauteilecke schon sehr ähnlich aussehen wird, dann könnte der Konturverlauf für $n=2$ auf den kleineren Bauraum für $n=3$ herunterskaliert werden. Abgeschätzt könnte eine Minderung des Wertes $2 \cdot b / \pi$ auf etwa $2/3$ des Wertes vom Fall $n=2$ eine annähernd gute Ausgangsform bieten. Das Diagramm auf der folgende Seite zeigt die vergleichende Situation mit $2 \cdot b / \pi = 0,4$.

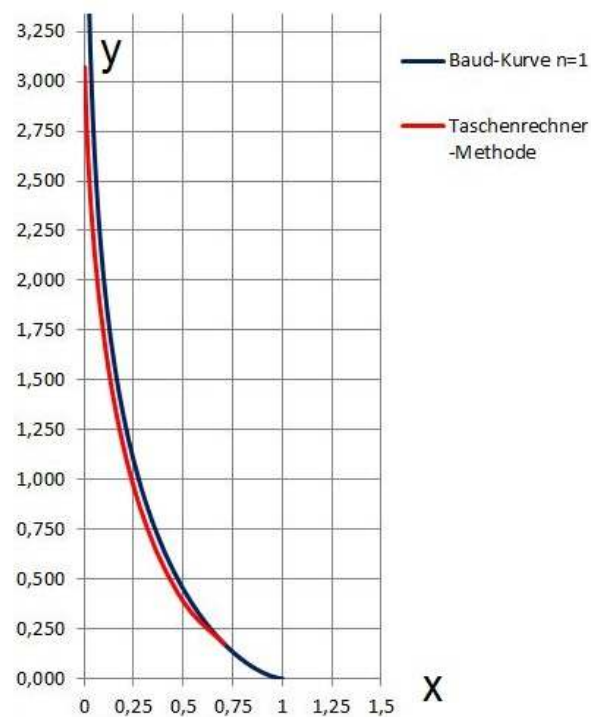
$$\frac{2 \cdot b}{\pi} = 0,4$$

n=3



Wie sich hier zeigt, ist im auslaufenden Bereich eine gute Übereinstimmung erzielt worden.

Zu guter Letzt fehlt jetzt noch ein Vergleich zwischen der Baud-Kurve (n=1) und dem Kurvenkonstrukt aus der „Taschenrechner-Methode“ aus 1.1.



Die Kurve der Taschenrechner-Methode (rot) wurde entsprechend so skaliert, dass sie im Punkt (0,707; 0,174) mit ihrer 45°-Tangente ausläuft und dort in Übereinstimmung mit der Baud-Kurve steht (punkt- und tangenstetig).

Das Resultat lässt sich sehen, da bis kurz vor dem 45°-Auslauf die Form konturparallel verläuft. Damit wäre dieser Vergleich ebenfalls eine Bestätigung dafür, dass mit der Methode nach 1.1 ein sehr guter Konturverlauf bzgl. des Axioms für Spannungskonstanz gegeben ist, da die Baud-Kurve als Referenzkurve einer empirisch/analytisch gefundenen Lösung zu werten ist, welche durch spannungsoptische Versuche untermauert wurde.

2.6 Baud-Kurve / Traktrix / Zugdreieck-Methode: Gibt es einen Unterschied?

Auf Seite 32 wurde dokumentiert, dass sich die Baud-Kurve ausgezeichnet an die Kontur der Zugdreiecke schmiegt. Die 45°-Tangente ($\theta = \pi/4$) liegt bei der Baud-Kurve am Punkt:

$$x_{45^\circ} = 1 - 2 \cdot \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}} \quad y_{45^\circ} = \ln\left[\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)\right] - \sin\theta + 0,1188 = 0,2931$$

Dass die 45°-Tangente ebenfalls bei dem Parameterwert $\theta = \pi/4$ ($=45^\circ$) liegt, folgt aus der Forderung $dy/dx = -1$.

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\left(1 - 2 \cdot \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) = -4 \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} = -\sin\theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\left[\ln\left[\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)\right] - \sin\theta + 0,1188\right] = -\cos\theta + \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= -\cos\theta + \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)} \cdot \frac{1}{2} = -\cos\theta + \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)}$$

$$= -\cos\theta + \frac{1}{\cos\theta} = \frac{\sin^2}{\cos\theta} = \sin\theta \cdot \tan\theta$$

$$\rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\sin\theta \cdot \tan\theta}{-\sin\theta} = \underline{\underline{-\tan\theta}} \quad \text{und das ist im Fall: } \theta = \frac{\pi}{4} \quad (=45^\circ)$$

Der Parameterwinkel θ gibt bei der Baud-Kurve somit auch immer zugleich den Tangentenwinkel an.

An dieser Stelle drängt sich nun förmlich die Frage auf, wie denn wohl die hergeleitete Traktrix-Gleichung (siehe Seite 26) aussehen würde, wenn der ansatzmäßig gewählte Tangentenpunkt bei den Zugdreiecken etwas verschoben würde, nämlich von ...

$$x(t) = \tilde{x}(t) \cdot \frac{3}{4} \quad \text{auf} \quad x(t) = \tilde{x}(t) \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \quad .$$

Dann würden die Tangentenpunkte auf L stets bei dem Wert $\tilde{L} = 1$ abgegriffen werden.

Baud-Kurve:

$$x(\theta) = 1 - 2 \cdot \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$y(\theta) = 1 \cdot \left[\ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)\right) - \sin(\theta) \right] + 0,119$$

Fall: $n = 1$

Der Vergleich geschieht in der Weise, dass der $x(\theta)$ -Term in die Gleichung von $\tilde{y}(x)$ eingesetzt wird und wie vereinbart $L = \sqrt{2}$ sei.

$$\rightarrow \tilde{y}(x(\theta)) = -\sqrt{1-x(\theta)^2} + 1 \cdot \ln\left[\frac{1}{x(\theta)} + \frac{1}{x(\theta)} \cdot \sqrt{1-x(\theta)^2}\right] + 0,119$$

$$\rightarrow \tilde{y}(x(\theta)) = -\sqrt{1-\left[1-2 \cdot \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]^2} + \ln\left[\frac{1}{1-2 \cdot \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \cdot \left(1 + \sqrt{1-\left[1-2 \cdot \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]^2}\right)\right] + 0,119$$

$$\rightarrow \tilde{y}(x(\theta)) = -\sqrt{1-[\cos\theta]^2} + \ln\left[\frac{1}{\cos\theta} \cdot \left(1 + \sqrt{1-[\cos\theta]^2}\right)\right] + 0,119$$

$$\rightarrow \tilde{y}(x(\theta)) = -\sin\theta + \ln\left[\frac{1}{\cos\theta} \cdot (1 + \sin\theta)\right] + 0,119$$

$$\rightarrow \tilde{y}(x(\theta)) = -\sin\theta + \ln\left[\frac{1}{\cos\theta} + \tan\theta\right] + 0,119$$

$$\rightarrow \tilde{y}(x(\theta)) = -\sin\theta + \ln\left[\frac{1}{\cos^2(\theta/2) - \sin^2(\theta/2)} + \frac{2 \cdot \tan(\theta/2)}{1 - \tan^2(\theta/2)}\right] + 0,119$$

$$\rightarrow \tilde{y}(x(\theta)) = -\sin\theta + \ln\left[\frac{1}{\frac{1}{1 + \tan^2(\theta/2)} - \frac{\tan^2(\theta/2)}{1 + \tan^2(\theta/2)}} + \frac{2 \cdot \tan(\theta/2)}{1 - \tan^2(\theta/2)}\right] + 0,119$$

$$\rightarrow \tilde{y}(x(\theta)) = -\sin\theta + \ln\left[\frac{1 + \tan^2(\theta/2) + 2 \cdot \tan(\theta/2)}{1 - \tan^2(\theta/2)}\right] + 0,119$$

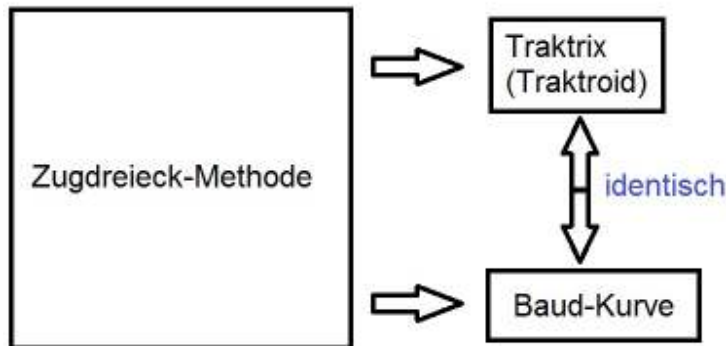
$$\rightarrow \tilde{y}(x(\theta)) = -\sin\theta + \ln\left[\frac{(1 + \tan(\theta/2))^2}{(1 - \tan(\theta/2)) \cdot (1 + \tan(\theta/2))}\right] + 0,119$$

$$\rightarrow \tilde{y}(x(\theta)) = -\sin\theta + \ln\left[\frac{(1 + \tan(\theta/2))}{(1 - \tan(\theta/2))}\right] + 0,119$$

$$\rightarrow \tilde{y}(x(\theta)) = -\sin\theta + \ln\left[\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)\right] + 0,119 = y(\theta)_{BAUD}$$

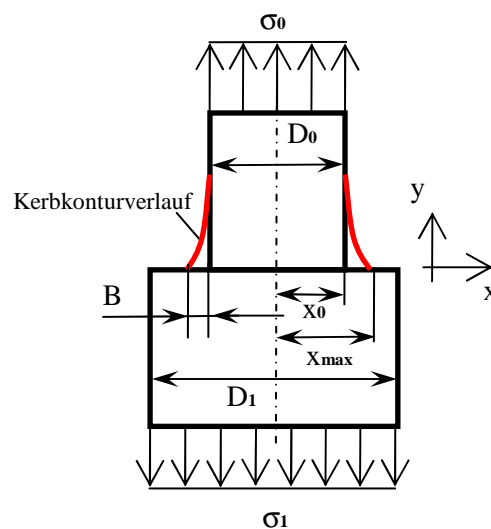
Wie man an der Herleitung klar ersehen kann, ist es möglich, die Traktrix-Gleichung in die Gleichung der Baud-Kurve zu transformieren. Es handelt sich hierbei nicht nur um eine ungefähre Ähnlichkeit dieser Kurven, vielmehr sind die beiden Kurven identisch!

D.h., die aus der Zugdreieck-Methode hergeleitete Traktrix (bzw. die damit auf einen Rotationskörper angewendete Traktroide) und die zu ihr überführbare Baud-Kurve bilden eine identische Einheit. Demzufolge dürfte hinsichtlich der Kerbspannungen kein Unterschied beim Vergleich der Zugdreieck-Methode / Traktrix / Baud-Kurve vorliegen!



2.7 Der real benötigte seitliche Bauraum:

Wie schon in Abschnitt 1.1 hingewiesen wurde, ist der Konturverlauf der Taschenrechner-Methode auf die entsprechenden Bauteilverhältnisse zu skalieren. In welcher Weise das geschehen kann, wird in [3] beschrieben und dokumentiert, da hier mit den Methoden der FEM und auch durch Experimente Ergebnisse für die Fälle $n=1...3$ zusammengetragen wurden.



Zur Dimensionierung des Bauraums wurde hierbei das Verhältnis B/D_0 herangezogen, wobei die Versuche mit einem Verhältnis $D_1/D_0 = 3$ stattfanden. Es hat sich dabei herausgestellt, dass die Kerbspannungen schon bei einem Verhältnis $B/D_0 < 0,4$ ausreichend gut abgebaut werden können, je nach Belastungsfall.

$$B / D_0 = (x_{\max} - x_0) / (2 \cdot x_0)$$

- Belastungsfall n = 1: reiner Zug in axialer Richtung des Bauteils (2D-Platte)
- Belastungsfall n = 2: reiner Zug in axialer Richtung des Bauteils (3D-Zylinder)
- Belastungsfall n = 2: Biegespannung in axialer Richtung des Bauteils (2D-Platte)
- Belastungsfall n = 3: Biegespannung in axialer Richtung des Bauteils (3D-Zylinder)

Ausreichend abgebaut werden die Kerbspannungen bei folgenden Verhältnissen:

$$n=1: \quad B / D_0 \approx 0,35 \quad \rightarrow \quad B / D_0 = \frac{1}{\pi} \quad (\text{gewählt})$$

$$n=2: \quad B / D_0 \approx 0,3 \quad \rightarrow \quad B / D_0 = \frac{1}{\pi} \quad (\text{gewählt})$$

$$n=3: \quad B / D_0 \approx 0,2 \quad \rightarrow \quad B / D_0 = \frac{2}{3 \cdot \pi} \quad (\text{gewählt})$$

3. Fazit

Innerhalb dieses Skriptes wurden hinsichtlich der Kerbformdimensionierung drei verschiedene Herangehensweisen betrachtet und gegenübergestellt. Dazu gehörten:

- 1) der CAO-Ansatz mit der Methode nach Scherrer,
- 2) die Zugdreieck-Methode und
- 3) die analytisch/experimentellen Erkenntnisse aus der Promotionsarbeit von R.V. Baud.

Innerhalb des Themenpunktes 1) wurde zudem der Versuch unternommen, eine detailliertere analytische Lösung zu finden, die mit dem Optimierungsansatz im Einklang steht und zudem auch weiterführende Belastungsfälle ($n=1 \dots 3$) betrachtet.

Bewertungen bzgl. der verschiedenen Belastungsfälle: (siehe Seite 9 und 40)

n=1:	Taschenrechner-Methode (CAO-Ansatz)	++
	Zugdreieck-Methode	+++
	Baud-Kurve	+++
	Traktrix	+++
	Tangens	++

Um eine berechnete Kurve vorzugeben, würde daher alles dafür sprechen, die Parameterdarstellung der Baud-Kurve zu verwenden, da diese sehr präzise mit dem Verlauf der Kurve aus der Zugdreieck-Methode harmoniert.

Da der Tangens einen sehr ausgeprägten 45° -Ausklang zur Bauteilschulter aufweist, weicht er in diesem Teil von der optimierten Gestaltung ab. Beim Tangens wäre daher eine entsprechende Ausrundung zur Bauteilschulter vorzunehmen, dito bei der Taschenrechner-Methode und Zugdreieck-Methode, da diese konstruktionsbedingt auch mit einer Tangente von 45° auslaufen.

n=2:	Taschenrechner-Methode (CAO-Ansatz)	+
	Zugdreieck-Methode	+
	Baud-Kurve (n=2)	++
	Traktrix	+

Da die Kerbkontur für $n=2$ nicht identisch mit dem Fall $n=1$ sein kann, sollte an dieser Stelle auf die empirisch ermittelte Kurve von Baud zurückgegriffen werden, die anfänglich flacher beginnt und sich am Ende zur Bauteilschulter hin stärker krümmt.

n=3: Baud-Kurve (n=2, aber skaliert) +

Für diesen Belastungsfall (reine 3D-Biegung) wird erwartungsgemäß ein noch flacherer Anfangsbereich vorliegen und sich eine ebenso stärkere Krümmung am Ende zur Bauteilschulter einstellen. Das lässt sich am einfachsten mit einer skalierten Kerbkontur realisieren, die an einen engeren Bauraum gekoppelt wird.

Die Baud-Kurve für die verschiedenen Belastungsfälle:

Auf Seite 40/41 wurde darauf eingegangen, dass die Kerbspannungen bei bestimmten Bauraumverhältnissen ($B/D_0 < 0,4$) weitestgehend abgebaut werden. Die folgenden Angaben sollen dazu dienen, geeignete x,y-Parameter zu berechnen/übernehmen und um in Abhängigkeit des Durchmessers D_0 zu einer optimierten Kerbkontur zu gelangen.

n = 1:

$$x(\theta) = \frac{2 \cdot b}{\pi} \cdot \left(1 - 2 \cdot \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) \quad y(\theta) = \frac{2 \cdot b}{\pi} \cdot \left[\ln \left(\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) \right) - \sin(\theta) \right] \quad \text{mit } \theta = 0 \dots 90^\circ$$

$$B/D_0 = \frac{1}{\pi}, \quad \text{wobei} \quad B = \frac{2 \cdot b}{\pi} \quad \rightarrow \quad \frac{2 \cdot b}{\pi} = \frac{D_0}{\pi}$$

$$x(\theta) = \frac{D_0}{\pi} \cdot \left(1 - 2 \cdot \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right)$$

$$y(\theta) = \frac{D_0}{\pi} \cdot \left[\ln \left(\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) \right) - \sin(\theta) \right]$$

n = 2:

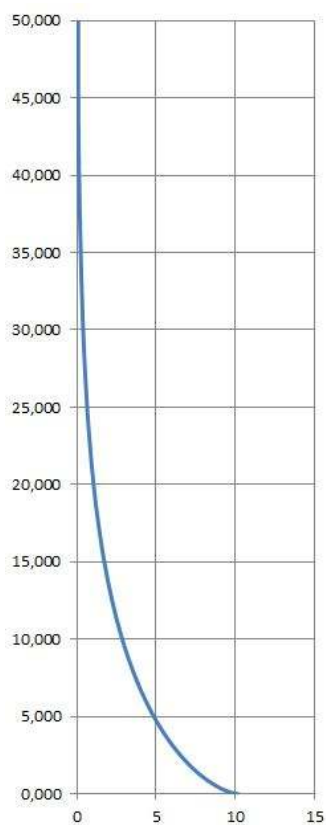
Die folgenden Werte der Tabelle sind mit dem Faktor $\frac{D_0}{\pi}$ zu multiplizieren:

x	y
1,000	0,000
0,876	0,001
0,748	0,005
0,487	0,060
0,265	0,240
0,168	0,513
0,106	0,993
0,040	1,985
0,018	3,012
0,009	4,005
0,000	4,964

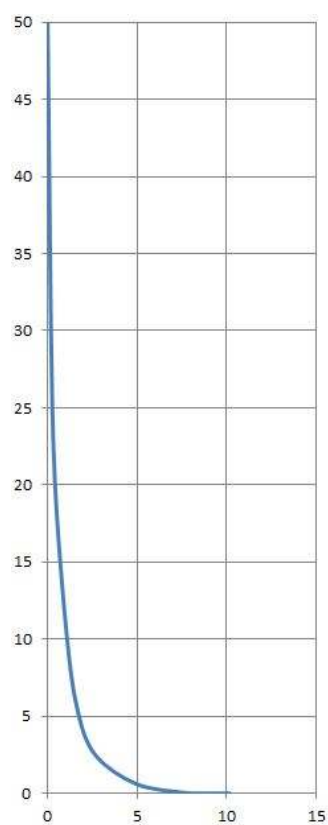
n = 3:

Die Werte der Tabelle (n=2) sind mit dem Faktor $\frac{2 \cdot D_0}{3 \cdot \pi}$ zu multiplizieren:

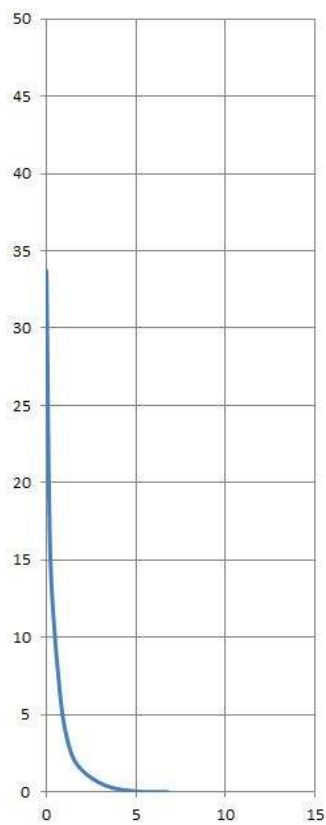
Baud-Kurven für $n=1\dots 3$ bei einem Durchmesser $D_0 = 32$:



Baud D32 n=1



Baud D32 n=2



Baud D32 n=3

Abschlusswort:

Schaut man sich etwas in der Literatur des Maschinenbaus und den bisher verfassten wissenschaftlichen Abhandlungen um, die sich speziell mit dem Thema der Kerbspannungen beschäftigt haben, so verwundert es einen, dass gerade bei den Kurventypen „Zugdreieck-Methode“, „Baud-Kurve“ und „Traktrix“ Unterschiede gesehen werden und diese Unterschiede dann auch experimentell herausgearbeitet wurden, obwohl es sich hier um identische Kurven handeln würde (siehe 2.6). Weitaus erstaunlicher ist es dann auch, dass sogar eine Traktroide als Patent angemeldet worden ist, ...*“FEM-Untersuchungen an verschiedenen Geometrien belegen, dass die Traktrix-Geometrie insbesondere Kerbspannungen am Fuß von Stegen und Masten vermeidet.“* ... , obwohl die „Treidelkurve“ (=Traktrix) schon 1693 durch Christiaan Huygens veröffentlicht und schließlich durch Robert Victor Baud (1934) als optimierte Kerbspannungskontur vorgestellt wurde. Da es sich aber bei der sogenannten „Baud-Kurve“ um eine Lösung der „vena contracta“ handelt (siehe Horace Lamb [5]), die wiederum in eine Traktrix (Schleppkurve, Treidelkurve) transformiert werden kann (siehe Abschnitt 2.6), darf selbstverständlich der Schluss gezogen werden, dass die Traktroide einer spannungsoptimierten Randkurve gleichkommt. Es ist etwas bedauerlich, dass dieser Kurven-Identität bisher zu wenig Beachtung geschenkt wurde und somit bei einigen Arbeiten der naheliegende Verdacht geäußert werden darf, dass diese mathematische Deckungsgleichheit aus Unkenntnis schlichtweg übersehen wurde.

Auch wenn die Schar an komplizierteren Kurventypen den Anschein erwecken, man würde manchmal nicht den Wald vor Bäumen sehen können, so sollte jedoch eines nicht geschehen, nämlich dass man „verschiedene“ Bäume im Vergleich zu untersuchen gedenkt, aber in Wirklichkeit immer nur am selben Ast sägt. Zum Glück darf man dann immer auf hervorragende Arbeiten wie die von R.V. Baud zurückgreifen, die das mechanische Weltbild wieder gerade setzen können.



Quellenverweise und weiterführende Fachliteratur:

[1]

Kerbspannungen und Kerbformoptimierung – von Marcus Scherrer
2004: Dissertation am Forschungszentrum Karlsruhe, Institut für Materialforschung
Wissenschaftliche Berichte FZKA 7021 – in der Helmholtz-Gemeinschaft

[2]

Warum alles kaputt geht: Form und Versagen in Natur und Technik – von Claus Mattheck
Karlsruher Institut für Technologie; Auflage: 1 (1. August 2003)

[3]

Denkwerkzeuge nach der Natur – von Claus Mattheck
Karlsruher Institut für Technologie; Auflage: 1 (31. Oktober 2010)

[4]

Beiträge zur Kenntnis der Spannungsverteilung in prismatischen und keilförmigen
Konstruktionselementen mit Querschnittübergängen – Promotionsarbeit vorgelegt von
Robert Victor Baud - Dipl. Masch. Ing. aus Meiringen
an der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich 1934
Buchdruckerei G. v. Ostheim Zürich

[5]

Lehrbuch der Hydrodynamik – Horace Lamb
Deutsche autorisierte Ausgabe (nach der 3. engl. Auflage) – Seite 110-113
Leipzig und Berlin, Druck und Verlag von B.G. Teubner 1907

[6]

Taschenbuch der Mathematik – L.N. Bronstein / K.A. Semendjajew
1. Auflage 1993 – Verlag Harri Deutsch, Thun, Frankfurt am Main

[7]

Taschenbuch der Mathematik – von Helmut Wörle / Johann Münch
R. Oldenbourg Verlag 1971 – 5. verbesserte und erweiterte Auflage