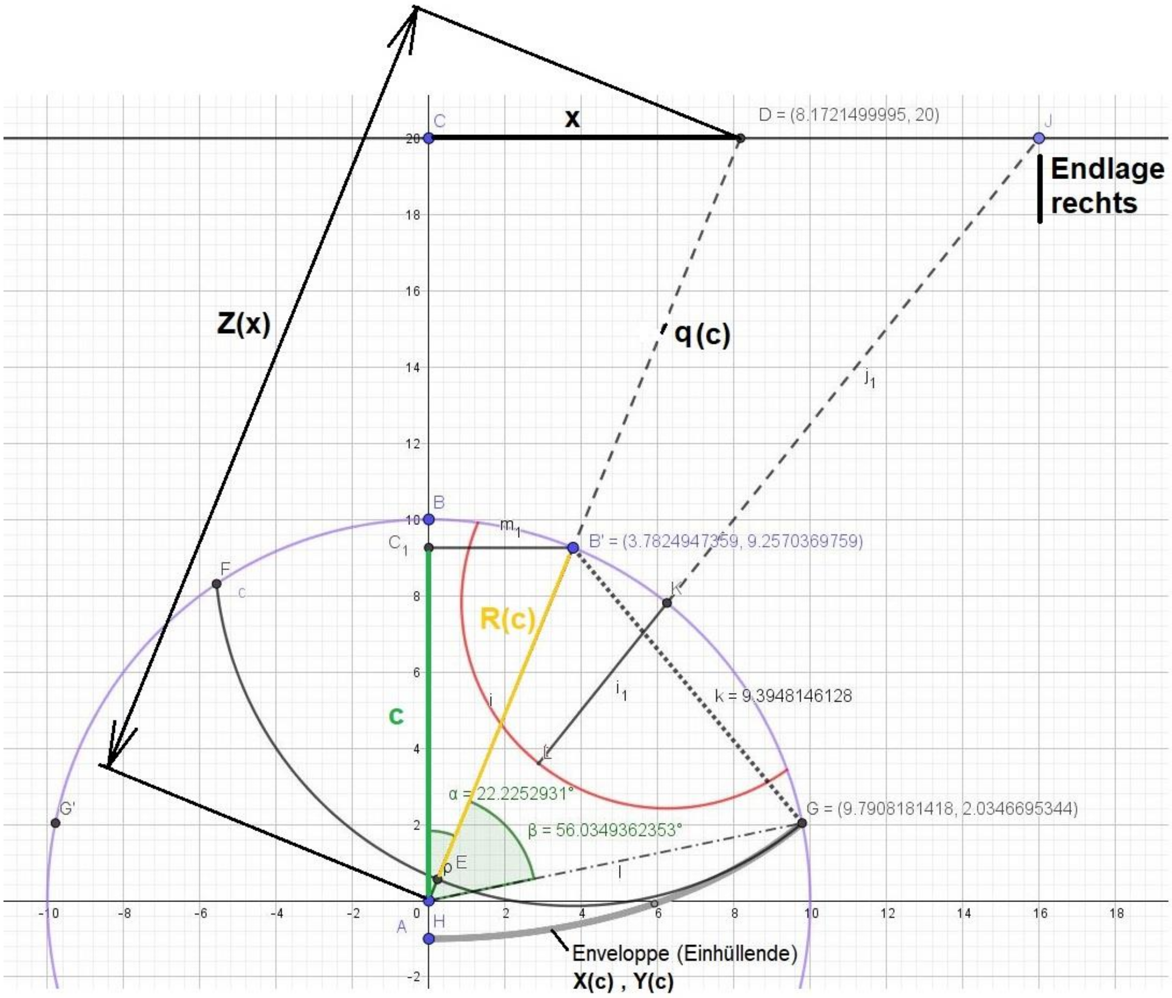
Lösungen zum erweiterten Ziegenproblem

(A) Mathematische Näherungslösung für die Hüllkurve (Enveloppe)

1. Bestimmung signifikanter Punkte, Werte und Winkel in der Konstruktion



Zuerst sind für die Konstruktion einige wichtige Punkte und Längen zu bestimmen, mit denen später auch weitergerechnet wird. Dazu zählen die Punkte B‘ und G, mit denen die Enveloppe im Innern des Kreises startet. Die Enveloppe endet dann im Punkt H.

$$Z(x) = \sqrt{x^2 + 20^2}$$

$$L = 21$$

$$k(x) = L - (Z(x) - 10) = 31 - Z(x)$$

$$\alpha = arctan\left(\frac{x}{20}\right)$$

$$\beta/2 = arcsin\left(\frac{k(x)/2}{10}\right)$$

Forderung:

$\alpha + \beta = Maximum$

$$\frac{d}{dx}(\alpha + \beta) = 0 = \frac{20}{400 + x^2} - \frac{2x}{\sqrt{(400 + x^2)\left(-961 - x^2 + 62\sqrt{400 + x^2}\right)}}$$

$\rightarrow x = 8.17215$
$\rightarrow \alpha = 22.22529310°$
$\rightarrow \beta = 56.0349362°$
$\rightarrow k = 9.394814613$

Damit ist der Punkt G (Endpunkt der Enveloppe) bestimmt:

$x_G = 10 \cdot sin(\alpha + \beta) = 9.7908181$
$y_G = 10 \cdot cos(\alpha + \beta) = 2.0346695$

Der Startpunkt der Enveloppe ist mit H und den Koordinaten (0,-1) gegeben.
Die Enveloppe entsteht somit, wenn der Punkt B' in Richtung Punkt B auf dem Kreis wandert.

Die y-Koordinate vom Punkt C1, welcher ebenfalls vertikal in Richtung Punkt B wandern würde, wird jetzt als Parameter C definiert.

Für diesen Parameter gilt: $9.257036976 \leq C \leq 10$

2. Bestimmung der Gleichung für die Enveloppe

Es muss gelten: $q(C) + R(C) = 21$

Unter Nutzung der Strahlensätze besteht die Relation:

$$\frac{10}{C} = \frac{q(C) + 10}{20}$$

$\rightarrow q(C) = \frac{200}{C} - 10$ $\rightarrow R(C) = 21 - q(C) = 31 - \frac{200}{C}$

Die Enveloppe soll durch die Punkte X(C) und Y(C) beschrieben werden. Damit ergibt sich der Zusammenhang:

$$\left(X - \sqrt{10^2 - C^2}\right)^2 + (Y - C)^2 = R(C)^2 = \left(31 - \frac{200}{C}\right)^2$$

Damit liegt folgende Gleichung für die Kurvenschar vor:

(I)

$$F(X,Y,C) = \left(X - \sqrt{10^2 - C^2}\right)^2 + (Y - C)^2 - \left(31 - \frac{200}{C}\right)^2 = 0$$

Des Weiteren lässt sich eine weitere Zusatzforderung für die Hüllkurve aufstellen:

(II)

$$\frac{\partial F(X,Y,C)}{\partial C} = 0 = \frac{80000}{C^3} + \frac{2C \cdot X}{\sqrt{100 - C^2}} - \frac{12400}{C^2} - 2Y$$

Da das Eliminieren des Parameters C sehr „unkomfortabel" ist, kann man auch einen anderen Weg gehen.

aus (I) folgt: $Y_I(X,C) = \dfrac{c^3 \pm \sqrt{c^2\left(40000 - 12400\,c + c^4 + c^2\left(861 + 2\sqrt{100 - c^2}\;x - x^2\right)\right)}}{c^2}$

aus (II) folgt: $Y_{II}(X,C) = \dfrac{6200\,c^3 - 40000\,c^2 + \sqrt{100 - c^2}\;c^4\,x - 620000\,c + 4000000}{100\,c^3 - c^5}$

Durch das Gleichsetzen dieser beiden Gleichungen erhält man dann:

$Y_I(X,C) = Y_{II}(X,C)$

$$\rightarrow X(C) = \frac{1}{200}\left(-\sqrt{-(c-10)(c+10)}\left(\frac{80000}{c^2} - \frac{12400}{c} - 200\right) - \frac{1}{c^3}20\sqrt{(-961\,c^8 + 12400\,c^7 - 328300\,c^6 + 3720000\,c^5 + 64880000\,c^4 - 992000000\,c^3 - 644000000\,c^2 + 49600000000\,c - 160000000000)}\right)$$

Setzt man nun die Werte von C für das Intervall [9.2570369759 ,10] in X(C) ein und geht mit diesen X-Werten in die Gleichung für Y(X,C), dann resultieren damit die Wertepaare X(C)/Y(C) der Enveloppe. Um den weiteren Aufwand im Rahmen zu halten, werden die Punkte X/Y durch ein Polynom 6.Grades angenähert. (z.B. mit Hilfe von Excel über die Trendlinien-Bestimmung)

Das Polynom würde dann beispielsweise so aussehen (als formaler Klartext):

$Y_P(X) =$ 0.0000014726*x^6 - 0.0000301819*x^5 + 0.0003275216*x^4 - 0.0010956908*x^3 + 0.0259286765*x^2 - 0.0014616499*x - 1.0000000000

jetzt jedoch geltend für das Intervall $0 \leq X \leq 9.7908181418$

Die Fläche der maximalen Futterfläche kann dann mittels eines Integrals berechnet werden:

$$A_{gesamt} = 2\int_{0}^{9.7908181418} [Y_K(X) - Y_P(X)] \cdot dX$$

wobei $Y_K(X) = \sqrt{10^2 - X^2}$ den Kreisbogen mit Radius 10 beschreibt.

Ergebnis der Fläche ist: $A_{gesamt} = 158.490\ FE$ (numerische Integration!)

Eine numerische Integration ist natürlich auch über die errechneten X-Y-Werte direkt möglich (z.B. über die Trapez-Methode). Bei einer Schrittweite von 0.001 bei den C-Werten kann man somit zu einem Ergebnis kommen, das dem obigen sehr nahe kommt.

$A_{gesamt} = 158.489\ FE$ (numerische Integration mit den errechneten X-Y-Werten!)

ANLAGE:

Berechnete Koordinaten der Enveloppe (Schrittweite 0.01 für C)

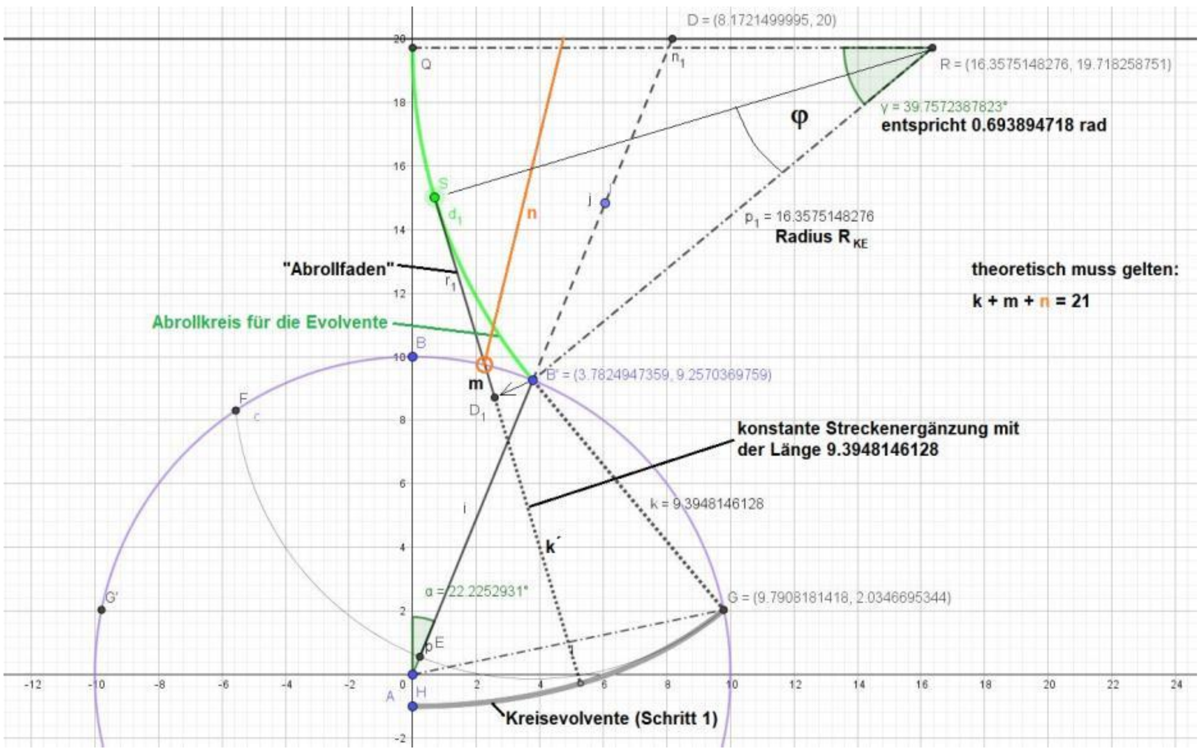
C-Werte	X	Y	C-Werte	X	Y
10	0	-1	9,62	6,275686166	0,045278529
9,99	0,940975979	-0,978867245	9,61	6,372936285	0,081691167
9,98	1,333339779	-0,957465917	9,6	6,469694643	0,118731502
9,97	1,636201897	-0,935791324	9,59	6,566004913	0,156418831
9,96	1,893040396	-0,913838643	9,58	6,661909201	0,194773466
9,95	2,120663578	-0,89160291	9,57	6,757448265	0,233816806
9,94	2,327676558	-0,869079015	9,56	6,852661711	0,27357142
9,93	2,519182788	-0,8462617	9,55	6,947588181	0,314061142
9,92	2,698502391	-0,823145547	9,54	7,042265532	0,355311169
9,91	2,867938309	-0,799724973	9,53	7,136731002	0,397348174
9,9	3,029165183	-0,775994226	9,52	7,23102138	0,44020043
9,89	3,18344582	-0,751947371	9,51	7,325173168	0,483897944
9,88	3,33176036	-0,727578287	9,5	7,419222739	0,528472616
9,87	3,474887656	-0,702880656	9,49	7,513206503	0,573958399
9,86	3,613458835	-0,677847956	9,48	7,60716107	0,6203915
9,85	3,747993856	-0,652473447	9,47	7,701123423	0,667810585
9,84	3,878927214	-0,626750165	9,46	7,795131093	0,71625702
9,83	4,0066265	-0,600670909	9,45	7,889222349	0,765775144
9,82	4,131406091	-0,57422823	9,44	7,983436401	0,816412572
9,81	4,253537453	-0,547414418	9,43	8,077813612	0,868220543
9,8	4,373257026	-0,52022149	9,42	8,17239574	0,921254311
9,79	4,490772351	-0,492641172	9,41	8,267226197	0,975573605
9,78	4,606266892	-0,464664891	9,4	8,36235034	1,031243142
9,77	4,719903885	-0,436283752	9,39	8,4578158	1,088333224
9,76	4,831829441	-0,407488526	9,38	8,55367285	1,14692044
9,75	4,942175066	-0,378269626	9,37	8,649974829	1,207088465
9,74	5,051059741	-0,348617096	9,36	8,746778633	1,268929012
9,73	5,15859164	-0,318520579	9,35	8,844145275	1,332542943
9,72	5,264869568	-0,287969304	9,34	8,942140553	1,398041586
9,71	5,369984171	-0,256952057	9,33	9,040835834	1,465548313
9,7	5,474018961	-0,225457155	9,32	9,140308984	1,535200423
9,69	5,577051197	-0,193472419	9,31	9,240645487	1,60715143
9,68	5,679152626	-0,160985144	9,3	9,341939812	1,681573851
9,67	5,780390145	-0,127982065	9,29	9,444297071	1,75866264
9,66	5,880826357	-0,094449322	9,28	9,547835081	1,838639458
9,65	5,980520072	-0,060372423	9,27	9,652686951	1,921758048
9,64	6,079526736	-0,0257362	9,26	9,759004353	2,008311078
9,63	6,177898821	0,009475232	9,257037	9,79081814150	2,034669534

(B) Der zweite Lösungsweg mit Hilfe einer Evolvente
- „Maschinenbauer-Lösung“ -

Wenn man davon ausgeht, dass die Enveloppe für diesen speziellen Fall sehr gut über eine Kreisevolvente „abgerollt“ werden kann, ergibt sich ein Lösungsweg, der in nicht so riesige Gleichungen ausartet und der trotzdem sehr adäquate Ergebnisse liefert, die in einem zweiten Schritt noch nachkorrigiert werden können.

<u>Schritt 1:</u> Konstruktion des Abrollkreises (Evolute) für die Evolvente

Es gibt zwei exakt bekannte Endpunkte der Enveloppe, nämlich H und G. Ein Punkt des Abrollkreises muss daher tangential an der Y-Achse anliegen und ein zweiter durch den Punkt B‘ gehen, wobei der Kreis tangential an die Strecke k anschließt. Damit ergibt sich ein Kreisbogen mit dem Mittelpunkt (16.3575148276/19.718258751) als Evolute. Lässt man von diesem Kreisbogen einen Faden abrollen (ab Punkt B‘) und ergänzt zu diesem die Strecke k‘ in tangentialer Richtung, dann entsteht dabei eine Kreisevolvente, die eine extrem gute Annäherung für die gesuchte Enveloppe ist.



Der Faden zwischen den Punkten S und D1 hat die Länge:

$$l = R_{KE} \cdot \varphi$$

Der Radius des Abrollkreises ist: $R_{KE} = 16.3575148276$

Die Summe k + m + n = 21 gilt für die Punkte der gesuchten Enveloppe. Bei der Verwendung der Kreisevolvente gibt es eine geringfügige Abweichung für die Streckenlänge m, die sich in Abhängigkeit vom Winkel φ ermitteln lässt.

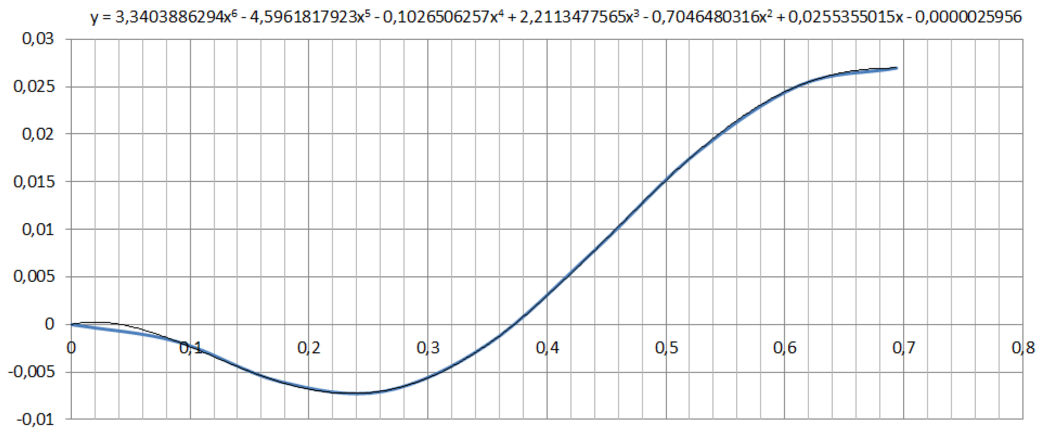
Der Futterradius R ergibt sich somit aus der Summe m + k.

$R_{Evol} = m_{Evol} + k$ bezogen auf die Evolventen-Konstruktion
$R_{Env} = m_{Env} + k$ bezogen auf die Enveloppen-Konstruktion

$\epsilon(X) = R_{Evol} - R_{Env} = m_{Evol} - m_{Env}$ Korrekturfunktion für Schritt 2

Schritt 2: Berechnung der Korrekturfunktion

In 5°-Winkelschritten für φ lassen sich insgesamt 9 Stützpunkte ermitteln. Aus diesen Punkten lässt sich das folgende Diagramm der Abweichungen erstellen:

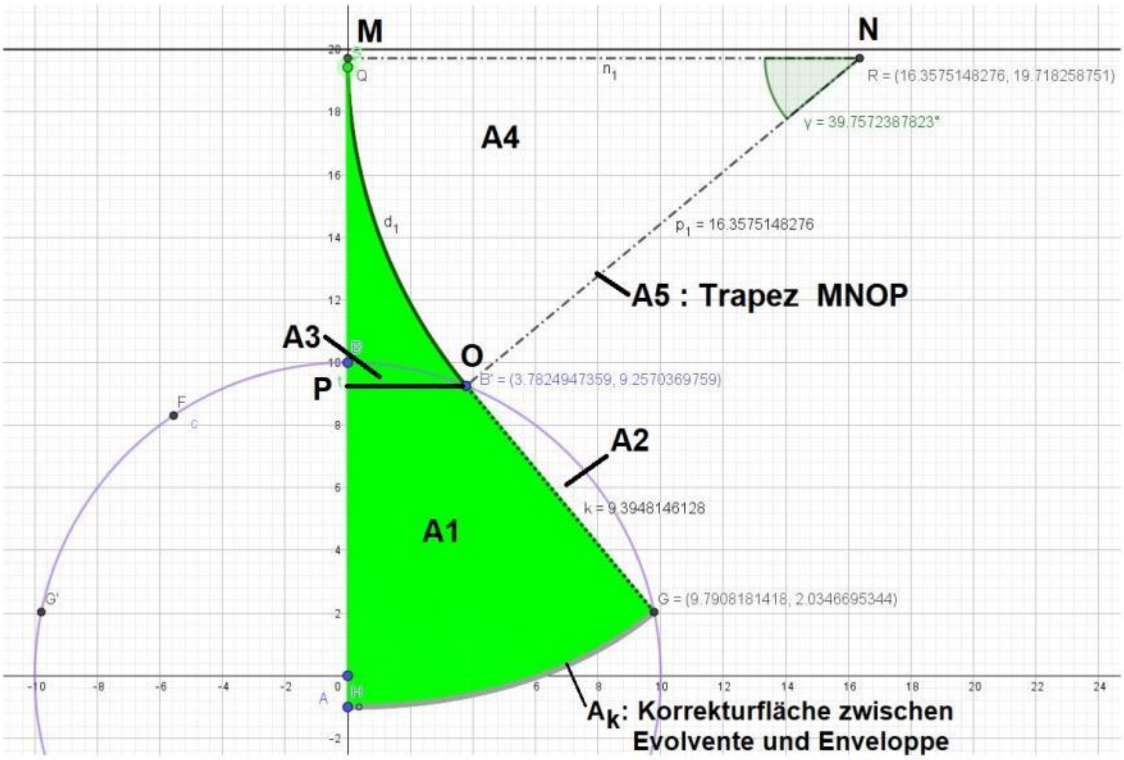


Diese Abweichungskurve kann wiederum als ein Polynom 6.Grades ausgedrückt werden und lautet in diesem Fall (als formaler Klartext):

$\epsilon(\varphi)$ = 3.3403886294* φ ^6 - 4.5961817923* φ ^5 - 0.1026506257* φ ^4 + 2.2113477565* φ ^3 - 0.7046480316* φ ^2 + 0.0255355015* φ - 0.0000025956

Schritt 3: Berechnung der Einzelflächen inkl. Korrektur

Die Futterfläche kann aus mehreren Einzelflächen zusammengesetzt werden, so wie es die Skizze zeigt (rechte Hälfte von der Problemstellung):



Die Gesamtfläche resultiert dann aus:

$$A_{gesamt} = 2 \cdot [A_1 + A_2 - (A_5 - A_4 - A_3) - A_k]$$

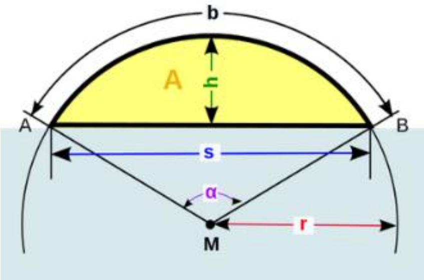
$$A_{gesamt} = 2 \cdot [A_1 + A_2 + A_3 + A_4 - A_5 - A_k]$$

Berechnung von A1:
Die überstrichene Fläche des „abgerollten Fadens" ergibt sich mit diesem Integral:

$$A_1 = \frac{1}{2}\int_0^{0{,}693894718\,rad} (R_{KE} \cdot \varphi + k)^2 d\varphi = \left.\frac{{R_{KE}}^2 \cdot \varphi^3}{3} + R_{KE} \cdot \varphi^2 \cdot k + \varphi \cdot k^2 \right]_0^{0{,}693894718\,rad}$$

$$A_1 = 82.5183724\ \text{FE}$$

Berechnung von A2:
Hier handelt es sich um einen Kreisabschnitt :



$\alpha = 0.977994133\,rad \quad (= 56.03493624°)$

$A_2 = \frac{R^2}{2} \cdot [\alpha - \sin(\alpha)] = \frac{10^2}{2} \cdot [0.977994133 - \sin(0.977994133\,rad)] = 7.430787\ \ FE$

Berechnung von A3:
Hier handelt es sich nun um einen halben Kreisabschnitt :

$\alpha = 2 \cdot 0.387904541\,rad \quad (= 44.4505862°)$

$A_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{R^2}{2} \cdot [\alpha - \sin(\alpha)] = \frac{10^2}{4} \cdot [0.775809083 - \sin(0.775809083\,rad)] = 1.887880\ \ FE$

Berechnung von A4:
Die Fläche des Kreissektors erhält man über:

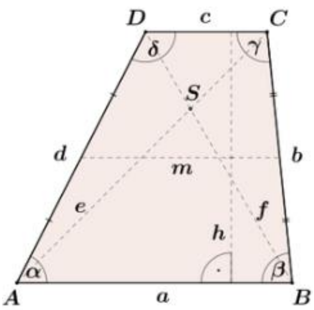
$\gamma = 39{,}7572387823°$

$A_4 = {R_{KE}}^2 \cdot \pi \cdot \frac{\gamma}{360°} = 16.3575148276^2 \cdot \pi \cdot \frac{39{,}7572387823°}{360°} = 92.832112\ \ FE$

Berechnung von A5:
Zum Trapez können folgende Angaben gemacht werden:

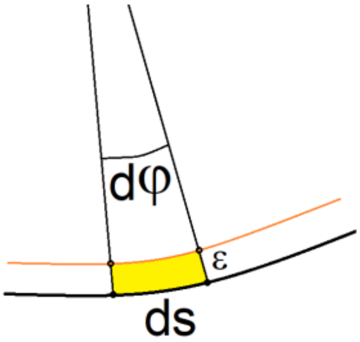
$h = 10.46122178$ und $m = (16.3575148276 + 3.7824947359) \cdot \frac{1}{2}$

$A_5 = m \cdot h = 10.07000478 \cdot 10.46122178 = 105.344553\,FE$



Berechnung von Ak:

Der flächentechnische Korrekturausgleich kann wiederum über ein Integral berechnet werden, in welches die Korrekturfunktion $\epsilon(\varphi)$ einfließt. Das Integral rechnet lediglich die abweichenden (infinitesimalen) Rechteckflächen $ds \cdot \epsilon(\varphi)$ einander auf.



$$A_k = \int_0^{0{,}693894718\,rad} (R_{KE} \cdot \varphi + k) \cdot \epsilon(\varphi) \cdot d\varphi = 0.0836609\ FE$$

Berechnung der Gesamtfläche:

$$A_{gesamt} = 2 \cdot [A_1 + A_2 + A_3 + A_4 - A_5 - A_k]$$

$A_{gesamt} =$

$+2x\ 82.5183724\ FE$
$+2x\ 7.430787\ FE$
$+2x\ 1.887880\ FE$
$+2x\ 92.832112\ FE$
$-2x\ 105.344553\ FE$
$-2x\ 0.0836609\ FE$

$= 158.48187 \ldots\ FE$

Dieses aus einzeln errechneten Flächen zusammengesetzte Ergebnis liegt nur 0,0051 % unter dem Wert 158,490 des ersten Lösungsweges (S.1 bis 4).

Der Vorteil dieser „Maschinenbauer-Lösung" ist, dass die Einzelflächen zum einen aus geometrisch einfach zu berechnenden Flächen bestehen und zum anderen die „Überstreichfläche" des Abrollfadens der Kreisevolvente leicht über die Integralrechnung zu lösen ist. Das gilt dann auch für das Integral zur Berechnung der Korrekturfläche, in dem ebenfalls nur ein Polynomausdruck integriert werden muss. D.h., die zweite Methode kommt im Wesentlichen mit den Möglichkeiten der Schulmathematik (Sekundarstufe II) aus.

Kai-Uwe Ekrutt 22.05.2022