Die Herleitung

von Summenformeln

$$S_{m(n)} = 1^m + 2^m + 3^m + \cdots + (n-1)^m + n^m$$

von

Kai-Uwe Ekrutt

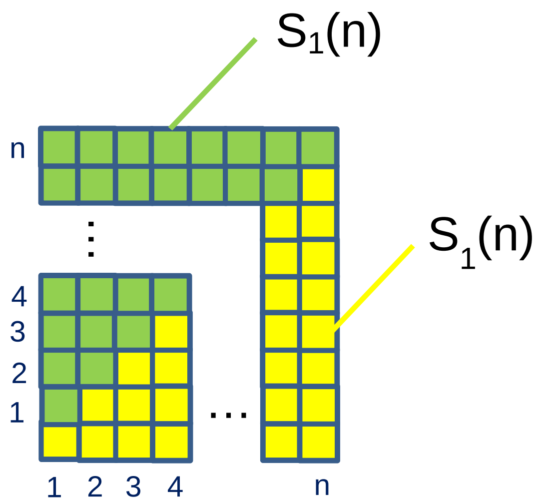
Januar 2018

Erste Fassung 001.16012018

Die Herleitung von Summenformeln der Form: $S_{m(n)} = \sum_{k=1}^{n} k^m = 1^m + 2^m + 3^m + \cdots + (n-1)^m + n^m$

1. Die Summe der ersten n natürlichen Zahlen:

$S_{1(n)} = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n$

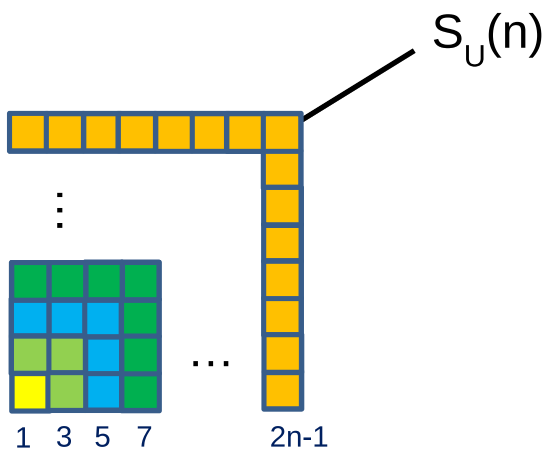


Stellt man die Summenformel einmal grafisch dar durch nebeneinander stehende Quadrat-Säulen, die eine ist gelb und die andere grün gefärbt, dann ergeben die beiden Bereiche zusammen das Doppelte der Summenformel $S_1(n)$. Die beiden Bereiche bilden aber auch ein Rechteck mit der Fläche n(n+1).

$\Rightarrow \quad S_{1(n)} = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1)$

2. Die Summe der ersten n ungeraden Zahlen:

$S_{U(n)} = 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2 \cdot n - 1)$



Jede ungerade Zahl lässt sich als ein sogenanntes „Gnomon“ darstellen, also aus einem Winkelteil aus 2k-1 Elementen (dargestellt durch die eingefärbten Winkelstücke in der Skizze). Aus der Darstellung erkannt man, dass das Hinzufügen eines Gnomon stets wieder ein neues Gesamtquadrat erzeugt. Die Summe der Ungeraden Zahlen ergibt eine Quadratzahl. Man erhält abschließend ein Quadrat mit n x n Elementen, und das ist genau die gesuchte Summe.

$$\Rightarrow \quad S_{U(n)} = n^2$$

3. Die Summe der ersten n geraden Zahlen:

$$S_{G(n)} = 2+4+6+8+ \cdots +(2 \cdot n)$$

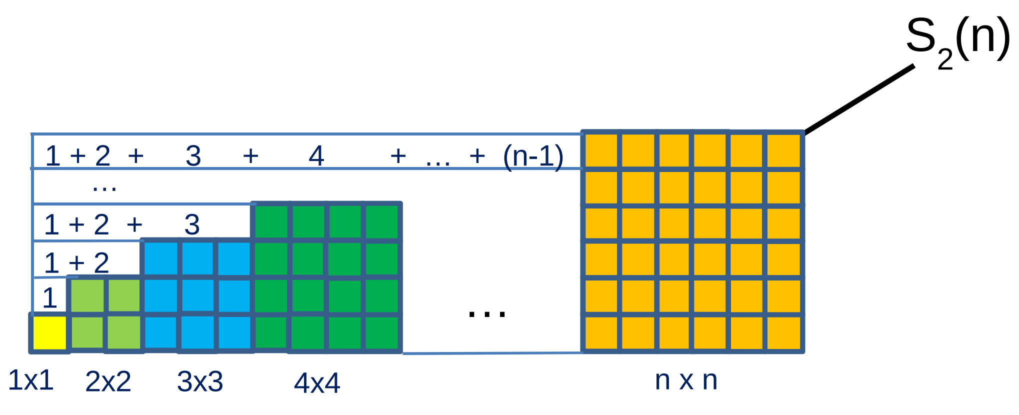
Addiert man zu jeder der n ersten ungeraden Zahlen jeweils +1 hinzu, dann ergeben sich daraus die ersten n geraden Zahlen. Darauf aufbauend resultiert somit die Summenformel der n geraden Zahlen, indem man die Summenformel der n ungeraden Zahlen nimmt und zu guter Letzt noch +n hinzuaddiert. Gleichermaßen entspricht die hergeleitete Formel auch dem Doppelten der Summenformel für die ersten n natürlichen Zahlen.

$$\Rightarrow \quad S_{G(n)} = n^2 + n = 2 \cdot S_{1(n)}$$

4. Die Summe der ersten n Quadratzahlen:

$$S_{2(n)} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2$$

In der grafischen Darstellung werden die ersten n Quadratzahlen horizontal nebeneinander aneinandergereiht. Die Summe der Quadratzahlen soll eine Untermenge eines Rechtecks sein, das die Gesamtfläche $S_1(n) * n$ besitzt. Um also auf die korrekte Summe zu kommen, muss von diesem Rechteck eine überschüssige Fläche (aufsummierte Zeilen) abgezogen werden, so wie es das Verfahren der nachfolgenden Skizze zeigt.



$$S_{2(n)} = S_{1(n)} \cdot n - [(1)+(1+2)+(1+2+3)+\ldots+(1+2+3+\ldots+(n-1))]$$

$$S_{2(n)} = S_{1(n)} \cdot n - [S_{1(1)} + S_{1(2)} + S_{1(3)} + S_{1(4)} + \ldots + S_{1(n-2)} + S_{1(n-1)}]$$

$$S_{2(n)} = S_{1(n)} \cdot n - \left[\frac{1^2+1}{2} + \frac{2^2+2}{2} + \frac{3^2+3}{2} + \frac{4^2+4}{2} + \ldots + \frac{(n-1)^2+(n-1)}{2} \right]$$

$$2 \cdot S_{2(n)} = 2 \cdot S_{1(n)} \cdot n - \left[S_{1(n-1)} + S_{2(n-1)} \right] = 2 \cdot S_{1(n)} \cdot n - \left[S_{1(n)} - n + S_{2(n)} - n^2 \right]$$

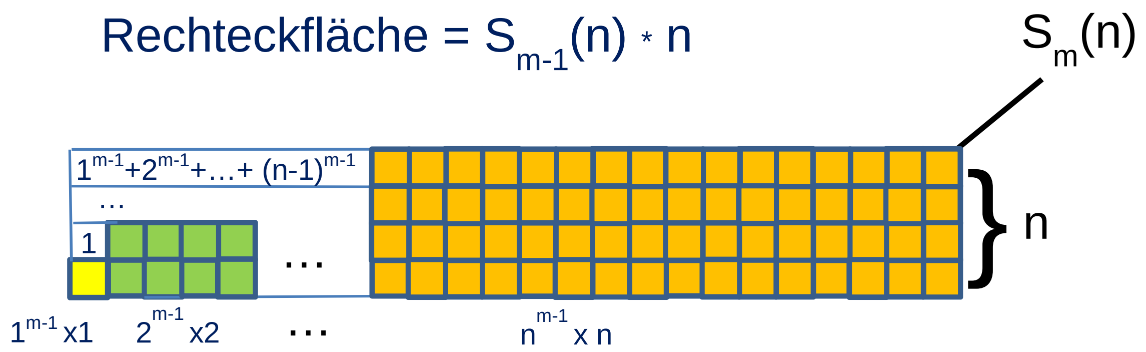
$$3 \cdot S_{2(n)} = 2 \cdot S_{1(n)} \cdot n - \left[S_{1(n)} - n - n^2 \right] = 2 \cdot S_{1(n)} \cdot n - \left[\frac{n^2+n}{2} - n - n^2 \right] = 2 \cdot S_{1(n)} \cdot n - \left[-\frac{n^2+n}{2} \right]$$

$$3 \cdot S_{2(n)} = 2 \cdot S_{1(n)} \cdot n + S_{1(n)} = 2 \cdot S_{1(n)} \cdot \left(n + \frac{1}{2} \right) = S_{1(n)} \cdot (2n+1) = \frac{n \cdot (n+1)}{2} \cdot (2n+1)$$

$$\Rightarrow \quad S_{2(n)} = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} = S_{1(n)} \cdot \frac{2n+1}{3} = \frac{1}{3} n^3 + \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{6} n$$

5. Allgemeines Herleitungsverfahren für: $S_{m(n)} = 1^m + 2^m + 3^m + \cdots + (n-1)^m + n^m$

Es handelt sich hierbei um ein schrittweises Verfahren für $S_m(n)$, wobei jedoch alle niedrigeren Summenformeln ($S_1(n)$, $S_2(n)$, ... , $S_{m-1}(n)$) schon bekannt sein müssen!



Wie beim Verfahren für die Summenformel der Quadratzahlen werden die einzelnen Glieder der Potenzen als Summe nebeneinander aufgereiht. Dabei geht man so vor, dass die horizontale Breite k^{m-1} und die Höhe k ist, sodass sich eine Teilfläche von k^m für jedes Glied ergibt. Das große Ausgangsrechteck besitzt die Gesamtfläche $S_{m-1}(n)*n$, von welcher dann wieder die überschüssigen aufsummierten Flächenzeilen abgezogen werden müssen.

Die allgemeine Herleitungsformel lautet dann:

$$S_{m(n)} = 1^m + 2^m + 3^m + \cdots + (n-1)^m + n^m$$

$$\underline{\underline{S_{m(n)} = S_{m-1(n)} \cdot n - \left[S_{m-1(1)} + S_{m-1(2)} + S_{m-1(3)} + \ldots + S_{m-1(n-1)} \right]}}$$

6. Die Summe der ersten n Kuben:

$$S_{3(n)} = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (n-1)^3 + n^3$$

Die Summenformel $S_3(n)$ soll mittels des allgemeinen Verfahrens hergeleitet werden. Gemäß der Herleitungsformel lautet der Ausdruck:

$$S_{3(n)} = S_{2(n)} \cdot n - \left[S_{2(1)} + S_{2(2)} + S_{2(3)} + \ldots + S_{2(n-1)}\right] = S_{2(n)} \cdot n - \left[S_{2(1)} + S_{2(2)} + S_{2(3)} + \ldots + \frac{(n-1)\cdot n \cdot (2(n-1)+1)}{6}\right]$$

$$S_{3(n)} = S_{2(n)} \cdot n - \left[S_{2(1)} + S_{2(2)} + S_{2(3)} + \ldots + \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6}\right] = S_{2(n)} \cdot n - \left[\frac{2}{6}\cdot\left(S_{3(n)} - 1\right) - \frac{3}{6}\cdot\left(S_{2(n)} - 1\right) + \frac{1}{6}\cdot\left(S_{1(n)} - 1\right)\right]$$

$$S_{3(n)} = S_{2(n)} \cdot n - \left[\frac{2}{6}\cdot S_{3(n)} - \frac{3}{6}\cdot S_{2(n)} + \frac{1}{6}\cdot S_{1(n)}\right]$$

$$6 \cdot S_{3(n)} = 6 \cdot S_{2(n)} \cdot n - \left[2 \cdot S_{3(n)} - 3 \cdot S_{2(n)} + 1 \cdot S_{1(n)}\right]$$

$$8 \cdot S_{3(n)} = 6 \cdot S_{2(n)} \cdot n + 3 \cdot S_{2(n)} - S_{1(n)} = S_{2(n)} \cdot (6n+3) - S_{1(n)} = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}\cdot(6n+3) - \frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

$$8 \cdot S_{3(n)} = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}\cdot 3\cdot(2n+1) - \frac{n\cdot(n+1)}{2} = \frac{1}{2}\cdot n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)^2 - \frac{1}{2}\cdot n\cdot(n+1) = \frac{1}{2}\cdot n\cdot(n+1)\cdot\left[(2n+1)^2 - 1\right]$$

$$8 \cdot S_{3(n)} = S_{1(n)} \cdot \left[(2n+1)^2 - 1\right] = S_{1(n)} \cdot \left[4n^2 + 4n\right] = 4 \cdot S_{1(n)} \cdot \left[n^2 + n\right] = 8 \cdot S_{1(n)} \cdot \left[\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right] = 8 \cdot \left(S_{1(n)}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad S_{3(n)} = \left(S_{1(n)}\right)^2 = \left[\frac{1}{2}\cdot n\cdot(n+1)\right]^2 = \frac{1}{4}\cdot n^4 + \frac{1}{2}\cdot n^3 + \frac{1}{4}\cdot n^2$$

7. Umformung des Herleitungsverfahrens für:

$$S_{m(n)} = 1^m + 2^m + 3^m + \cdots + (n-1)^m + n^m$$

Um schrittweise die nachfolgenden Summenformeln ($S_4(n)$, $S_5(n)$, …) herzuleiten, ist es zweckmäßig, die allgemeine Herleitungsformel etwas abzuwandeln und Koeffizienten innerhalb der eckigen Klammer einzuführen.

$$S_{m(n)} = S_{m-1(n)} \cdot n - \left[\left(S_{m-1(1)} + S_{m-1(2)} + S_{m-1(3)} + \ldots + S_{m-1(n-1)} + S_{m-1(n)}\right) - S_{m-1(n)}\right]$$

$$S_{m(n)} = S_{m-1(n)} \cdot n - \left[C_1 \cdot S_{1(n)} + C_2 \cdot S_{2(n)} + C_3 \cdot S_{3(n)} + \ldots + C_{m-1} \cdot S_{m-1(n)} + C_m \cdot S_{m(n)}\right]$$

$$\Rightarrow \quad S_{m(n)} = \frac{S_{m-1(n)} \cdot \left(n - C_{m-1}\right) - \left[C_1 \cdot S_{1(n)} + C_2 \cdot S_{2(n)} + C_3 \cdot S_{3(n)} + \ldots + C_{m-2} \cdot S_{m-2(n)}\right]}{1 + C_m}$$

Die Koeffizienten müssen bei jeder Herleitung erst einmal bestimmt werden.

8. Anwenden des Herleitungsverfahrens bzgl. $S_4(n)$:

$$S_{4(n)} = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + (n-1)^4 + n^4$$

$$S_{4(n)} = S_{3(n)} \cdot n - \left[\left(S_{3(1)} + S_{3(2)} + S_{3(3)} + \ldots + S_{3(n-1)} + S_{3(n)}\right) - S_{3(n)}\right]$$

$$S_{4(n)} = S_{3(n)} \cdot n - \left[C_1 \cdot S_{1(n)} + C_2 \cdot S_{2(n)} + C_3 \cdot S_{3(n)} + C_4 \cdot S_{4(n)}\right]$$

$$\Rightarrow \quad S_{4(n)} = \frac{S_{3(n)} \cdot \left(n - C_3\right) - \left[C_1 \cdot S_{1(n)} + C_2 \cdot S_{2(n)}\right]}{1 + C_4}$$

Es gilt für: $S_{3(k)} = \frac{1}{4}\cdot k^4 + \frac{1}{2}\cdot k^3 + \frac{1}{4}\cdot k^2$

$$S_{4(n)} = S_{3(n)}\cdot n - \left[\left(S_{3(1)} + S_{3(2)} + S_{3(3)} + \ldots + S_{3(n-1)} + S_{3(n)}\right) - S_{3(n)}\right]$$
$$S_{4(n)} = S_{3(n)}\cdot n - \left[\left(\frac{1}{4}\cdot S_{4(n)} + \frac{1}{2}\cdot S_{3(n)} + \frac{1}{4}\cdot S_{2(n)}\right) - S_{3(n)}\right]$$
$$S_{4(n)} = S_{3(n)}\cdot n - \left[\frac{1}{4}\cdot S_{4(n)} - \frac{1}{2}\cdot S_{3(n)} + \frac{1}{4}\cdot S_{2(n)}\right]$$
$$\rightarrow \quad C_1 = 0 \quad C_2 = \frac{1}{4} \quad C_3 = -\frac{1}{2} \quad C_4 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \quad S_{4(n)} = \frac{S_{3(n)}\cdot(n - C_3) - \left[C_1\cdot S_{1(n)} + C_2\cdot S_{2(n)}\right]}{1 + C_4} = \frac{S_{3(n)}\cdot\left(n + \frac{1}{2}\right) - \left[0\cdot S_{1(n)} + \frac{1}{4}\cdot S_{2(n)}\right]}{1 + \frac{1}{4}}$$
$$S_{4(n)} = \frac{S_{3(n)}\cdot 2\cdot(2n+1) - S_{2(n)}}{5} = \frac{\left(S_{1(n)}\right)^2\cdot 2\cdot(2n+1) - S_{2(n)}}{5} = \frac{1}{5}\cdot\left[\frac{\left(4n^3 + 2n^2\right)\cdot\left(n^2 + 2n + 1\right)}{4} - \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}\right]$$
$$S_{4(n)} = \frac{1}{5}\cdot\left[\frac{4n^5 + 10n^4 + 8n^3 + 2n^2}{4} - \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}\right] = \frac{6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n}{30}$$

$$\Rightarrow \quad S_{4(n)} = \frac{1}{5}\cdot n^5 + \frac{1}{2}\cdot n^4 + \frac{1}{3}\cdot n^3 - \frac{1}{30}\cdot n = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)\cdot\left(3n^2 + 3n - 1\right)}{30} = S_{2(n)}\cdot\frac{3n^2 + 3n - 1}{5}$$

9. Anwenden des Herleitungsverfahrens bzgl. $S_5(n)$:

$$S_{5(n)} = 1^5 + 2^5 + 3^5 + \cdots + (n-1)^5 + n^5$$

$$S_{5(n)} = S_{4(n)}\cdot n - \left[\left(S_{4(1)} + S_{4(2)} + S_{4(3)} + \ldots + S_{4(n-1)} + S_{4(n)}\right) - S_{4(n)}\right]$$
$$S_{5(n)} = S_{4(n)}\cdot n - \left[C_1\cdot S_{1(n)} + C_2\cdot S_{2(n)} + C_3\cdot S_{3(n)} + C_4\cdot S_{4(n)} + C_5\cdot S_{5(n)}\right]$$

$$\Rightarrow \quad S_{5(n)} = \frac{S_{4(n)}\cdot(n - C_4) - \left[C_1\cdot S_{1(n)} + C_2\cdot S_{2(n)} + C_3\cdot S_{3(n)}\right]}{1 + C_5}$$

Es gilt für: $S_{4(k)} = \frac{1}{5}\cdot k^5 + \frac{1}{2}\cdot k^4 + \frac{1}{3}\cdot k^3 - \frac{1}{30}\cdot k$

$$S_{5(n)} = S_{4(n)}\cdot n - \left[\left(S_{4(1)} + S_{4(2)} + S_{4(3)} + \ldots + S_{4(n-1)} + S_{4(n)}\right) - S_{4(n)}\right]$$
$$S_{5(n)} = S_{4(n)}\cdot n - \left[\left(\frac{1}{5}\cdot S_{5(n)} + \frac{1}{2}\cdot S_{4(n)} + \frac{1}{3}\cdot S_{3(n)} - \frac{1}{30}\cdot S_{1(n)}\right) - S_{4(n)}\right]$$
$$S_{5(n)} = S_{4(n)}\cdot n - \left[\frac{1}{5}\cdot S_{5(n)} - \frac{1}{2}\cdot S_{4(n)} + \frac{1}{3}\cdot S_{3(n)} - \frac{1}{30}\cdot S_{1(n)}\right]$$
$$\rightarrow \quad C_1 = -\frac{1}{30} \quad C_2 = 0 \quad C_3 = \frac{1}{3} \quad C_4 = -\frac{1}{2} \quad C_5 = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \quad S_{5(n)}=\frac{S_{4(n)}\cdot(n-C_4)-[C_1\cdot S_{1(n)}+C_2\cdot S_{2(n)}+C_3\cdot S_{3(n)}]}{1+C_5}=\frac{S_{4(n)}\cdot\left(n+\frac{1}{2}\right)-\left[-\frac{1}{30}\cdot S_{1(n)}+0\cdot S_{2(n)}+\frac{1}{3}\cdot S_{3(n)}\right]}{1+\frac{1}{5}}$$

$$S_{5(n)}=\frac{S_{4(n)}\cdot\left(5n+\frac{5}{2}\right)+\frac{1}{6}\cdot S_{1(n)}-\frac{5}{3}\cdot S_{3(n)}}{6}$$

$$S_{5(n)}=\frac{\left(\frac{1}{5}\cdot n^5+\frac{1}{2}\cdot n^4+\frac{1}{3}\cdot n^3-\frac{1}{30}\cdot n\right)\cdot\left(5n+\frac{5}{2}\right)+\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{n^2+n}{2}\right)-\frac{5}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot n^4+\frac{1}{2}\cdot n^3+\frac{1}{4}\cdot n^2\right)}{6}$$

$$S_{5(n)}=\frac{1}{6}\cdot\left[\left(n^6+3n^5+\frac{35}{12}n^4+\frac{5}{6}n^3-\frac{1}{6}n^2-\frac{1}{12}n\right)+\left(\frac{1}{12}n^2+\frac{1}{12}n\right)-\left(\frac{5}{12}\cdot n^4+\frac{5}{6}\cdot n^3+\frac{5}{12}\cdot n^2\right)\right]$$

$$S_{5(n)}=\frac{1}{6}\cdot\left[n^6+3n^5+\frac{5}{2}n^4-\frac{1}{2}\cdot n^2\right]$$

$$\Rightarrow \quad S_{5(n)}=\frac{1}{6}\cdot n^6+\frac{1}{2}\cdot n^5+\frac{5}{12}\cdot n^4-\frac{1}{12}\cdot n^2$$

Aus den ersten Herleitungen lässt sich mittlerweile ersehen, dass für die beiden Koeffizienten C_{m-1} und C_m die Werte vorausberechnet werden können.

Es gilt für $S_{m(n)}:\ C_m=\frac{1}{m} \qquad C_{m-1}=-\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \quad S_{m(n)}=\frac{S_{m-1(n)}\cdot\left(n+\frac{1}{2}\right)-[C_1\cdot S_{1(n)}+C_2\cdot S_{2(n)}+C_3\cdot S_{3(n)}+\ldots+C_{m-2}\cdot S_{m-2(n)}]}{\frac{m+1}{m}}$$

10. Anwenden des Herleitungsverfahrens bzgl. $S_6(n)$:

$$S_{6(n)}=1^6+2^6+3^6+\ \cdots\ +(n-1)^6+n^6$$

$$S_{6(n)}=S_{5(n)}\cdot n-[(S_{5(1)}+S_{5(2)}+S_{5(3)}+\ldots+S_{5(n-1)}+S_{5(n)})-S_{5(n)}]$$
$$S_{6(n)}=S_{5(n)}\cdot n-[C_1\cdot S_{1(n)}+C_2\cdot S_{2(n)}+C_3\cdot S_{3(n)}+C_4\cdot S_{4(n)}+C_5\cdot S_{5(n)}+C_6\cdot S_{6(n)}]$$

$$\Rightarrow \quad S_{6(n)}=\frac{S_{5(n)}\cdot\left(n+\frac{1}{2}\right)-[C_1\cdot S_{1(n)}+C_2\cdot S_{2(n)}+C_3\cdot S_{3(n)}+C_4\cdot S_{4(n)}]}{\frac{7}{6}}$$

Es gilt für: $\quad \Rightarrow \quad S_{5(k)}=\frac{1}{6}\cdot k^6+\frac{1}{2}\cdot k^5+\frac{5}{12}\cdot k^4-\frac{1}{12}\cdot k^2$

$$S_{6(n)} = S_{5(n)} \cdot n - \left[\left(S_{5(1)} + S_{5(2)} + S_{5(3)} + \ldots + S_{5(n-1)} + S_{5(n)}\right) - S_{5(n)}\right]$$

$$S_{6(n)} = S_{5(n)} \cdot n - \left[\left(\frac{1}{6} \cdot S_{6(n)} + \frac{1}{2} \cdot S_{5(n)} + \frac{5}{12} \cdot S_{4(n)} - \frac{1}{12} \cdot S_{2(n)}\right) - S_{5(n)}\right]$$

$$S_{6(n)} = S_{5(n)} \cdot n - \left[\frac{1}{6} \cdot S_{5(n)} - \frac{1}{2} \cdot S_{5(n)} + \frac{5}{12} \cdot S_{4(n)} - \frac{1}{12} \cdot S_{2(n)}\right]$$

$$\rightarrow \quad C_1 = 0 \quad C_2 = -\frac{1}{12} \quad C_3 = 0 \quad C_4 = +\frac{5}{12} \quad C_5 = -\frac{1}{2} \quad C_6 = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \quad S_{6(n)} = \frac{S_{5(n)} \cdot \left(n + \frac{1}{2}\right) - \left[0 \cdot S_{1(n)} - \frac{1}{12} \cdot S_{2(n)} + 0 \cdot S_{3(n)} + \frac{5}{12} \cdot S_{4(n)}\right]}{\frac{7}{6}}$$

$$S_{6(n)} = \frac{S_{5(n)} \cdot (6n+3) + \frac{1}{2} \cdot S_{2(n)} - \frac{5}{2} \cdot S_{4(n)}}{7}$$

$$S_{6(n)} = \frac{\left(\frac{1}{6} \cdot n^6 + \frac{1}{2} \cdot n^5 + \frac{5}{12} \cdot n^4 - \frac{1}{12} \cdot n^2\right) \cdot (6n+3) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n\right) - \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{5} \cdot n^5 + \frac{1}{2} \cdot n^4 + \frac{1}{3} \cdot n^3 - \frac{1}{30} \cdot n\right)}{7}$$

$$S_{6(n)} = \frac{\left(n^7 + \frac{7}{2} \cdot n^6 + 4 \cdot n^5 + \frac{5}{4} \cdot n^4 - \frac{1}{2} \cdot n^3 - \frac{1}{4} \cdot n^2\right) + \left(\frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{12}n\right) - \left(\frac{1}{2} \cdot n^5 + \frac{5}{4} \cdot n^4 + \frac{5}{6} \cdot n^3 - \frac{1}{12} \cdot n\right)}{7}$$

$$S_{6(n)} = \frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2} \cdot n^6 + \frac{1}{2} \cdot n^5 - \frac{1}{6} \cdot n^3 + \frac{1}{42} \cdot n$$

$$\Rightarrow \quad S_{6(n)} = \frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2} \cdot n^6 + \frac{1}{2} \cdot n^5 - \frac{1}{6} \cdot n^3 + \frac{1}{42} \cdot n$$

11. Summenformel bzgl. $S_7(n)$:

$$S_{7(n)} = 1^7 + 2^7 + 3^7 + \cdots + (n-1)^7 + n^7$$

(ohne Herleitung)

$$S_{7(n)} = \frac{1}{8}n^8 + \frac{1}{2} \cdot n^7 + \frac{7}{12} \cdot n^6 - \frac{7}{24} \cdot n^4 + \frac{1}{12} \cdot n^2$$

12. Interessante Eigenschaft bzgl. der Summenformel $S_6(n)$:

Multipliziert man die Summenformel $S_6(n)$ mit der Fakultät von 7, dann ergibt das den Ausdruck:

$$S_{6(n)} \cdot 7\,! = 720 \cdot n^7 + 2520 \cdot n^6 + 2520 \cdot n^5 - 840 \cdot n^3 + 120 \cdot n$$

Die Koeffizienten 120, 720, 840, 2520 stammen alle aus der Zahlenreihe der sogenannten „Hochzusammengesetzten Zahlen“ (A002182 in OEIS).

1|2|4|6|12|24|36|48|60|**120**|180|240|360|**720**|**840**|1260|1680|**2520**|5040|7560 …